ESCUELA NORMAL SUPERIOR Y

SUPERIOR DE COMERCIO N° 46

"Domingo Guzmán Silva"

Cuadernillo de Matemática

4to año

Ciclo lectivo 2024

Organización del cuadernillo

Acuerdo Pedagógico

Pautas de trabajo y convivencia:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- A partir del 2do año, es necesario contar con calculadoras científicas como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en **formato papel.**
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

Para acreditar la materia:

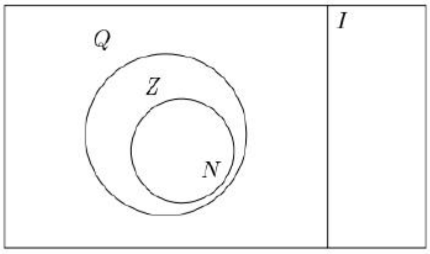
- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.

……………………………………… ………………………………………………….

Firma estudiante Firma padre/madre/tutor

Unidad I: Números Reales y Números Complejos

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está formado por el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los números irracionales $\mathbb{I}$.

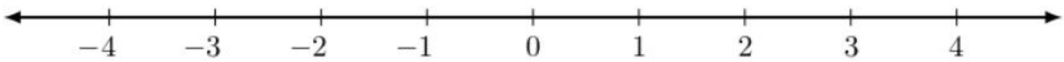


Los números naturales sirven para contar y para numerar. Se puede sumar y multiplicar y el resultado de esas operaciones es un número natural.

Los números naturales no siempre pueden restarse por ejemplo, $8 - 12 = -4$

Aparecen así los números negativos.

Se define el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, formado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero. El conjunto $\mathbb{Z}$ está totalmente ordenado, por eso se representa en la recta numérica.



En $\mathbb{Z}$ podemos sumar y restar con la seguridad de que el resultado es un número entero, pero no siempre se puede resolver la división por ejemplo, $3 : 8 = \frac{3}{8}$

Aparecen así los números fraccionarios, que surgen de la necesidad de expresar porciones de la unidad y en especial cuando se realizan mediciones.

El conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios se designa con $\mathbb{Q}$ y es el conjunto de los números racionales.

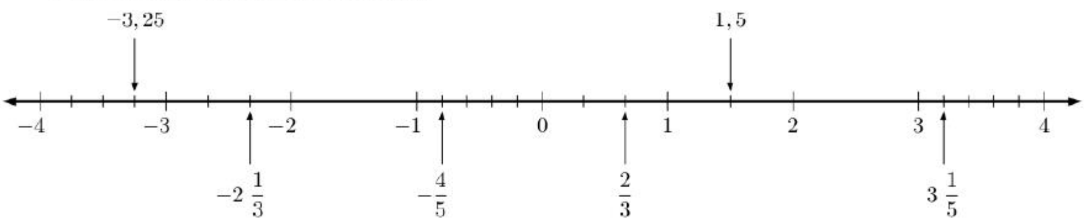
En $\mathbb{Q}$ podemos sumar, restar, multiplicar y dividir con la seguridad de que el resultado es un número racional. Los números racionales, se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir como una razón.

$$\frac{a}{b} \quad a \; y \; b \quad son\ enteros\ y \quad b \neq 0$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} Ej. & = & -\frac{3}{5} & ; & 7 & ; & 0 & ; & 2{,}81 & ; & 0{,}\overset{\frown}{6} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & -\frac{3}{5} & & \frac{7}{1} & & \frac{0}{1} & & \frac{281}{100} & & \frac{2}{3} \end{array}$$

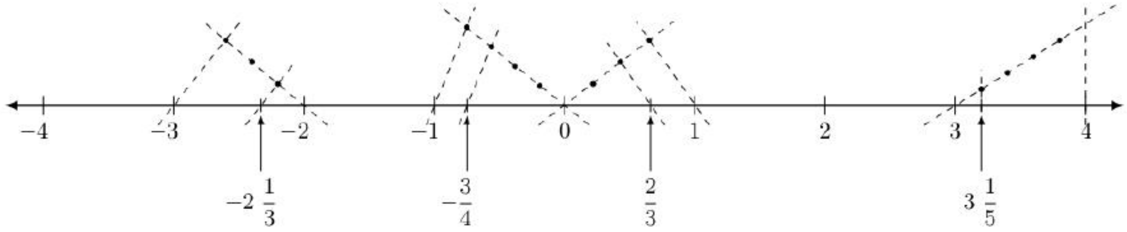
El conjunto de los números racionales

- ✓ Es un conjunto infinito, no tiene ni primer ni último elemento.
- ✓ Pueden expresarse como decimales finitos o periódicos.
- ✓ Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso decimos que es un conjunto denso.
- ✓ A todo racional le corresponde un punto en la recta numérica, pero no a todo punto le corresponde un número racional.



Para ubicar los números racionales, por ejemplo $\frac{2}{3}$ se divide la unidad en 3 partes y se toman 2 contando a partir de cero.

Para graficar con mayor precisión lo hacemos a través del teorema de Tales. Con un segmento auxiliar se marcan 3 unidades y se toman 2, se traza una paralela a la recta $\overleftrightarrow{bc}$.



Aparecen los números como $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ que no son racionales porque no pueden escribirse como cociente de dos números enteros, ni como decimal exacto o periódico.

Su expresión decimal es:

$$\sqrt{2} = 1{,}414243562$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050808$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236067977$$

A estos números se los llama Irracionales $\mathbb{I}$

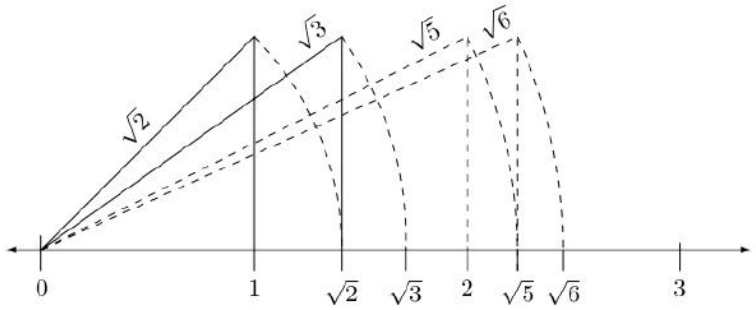
La raíz cuadrada de un número natural, si no es entera, es irracional: $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$

Además π es un número irracional que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia i el área del círculo.

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Para ubicar los números racionales debemos utilizar el teorema de Pitágoras.

Se construye un triángulo cuyos lados tengan la unidad, así obtenemos $\sqrt{2}$ que es la hipotenusa del triángulo.



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$x = \sqrt{2}$$

Para ubicar la $\sqrt{3}$ formamos un triángulo de lados $\sqrt{2}$ y 1, y por Pitágoras

$$y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$$
$$y = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}$$
$$y = \sqrt{2+1}$$
$$y = \sqrt{3}$$

Para tener en cuenta: todo número racional tiene un desarrollo decimal exacto o periódico, por lo tanto la representación decimal termina o se repite. Todo número irracional tiene un desarrollo de infinitas cifras decimales no periódicas, por lo tanto la representación decimal nunca termina ni se repite.

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama conjunto de los números reales y se lo designa con $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales

- ✓ Es un conjunto infinito, no tiene ni primero ni último elemento.
- ✓ Es un conjunto totalmente ordenado, dados dos números reales distintos, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor a mayor.
- ✓ Los números reales completan la recta, esto significa que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Sintetizando:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales } \mathbb{N}\\ \text{Cero}\\ \text{N° Negativos}\end{array}\right\} \text{Enteros } \mathbb{Z}\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right\} \text{Racionales } \mathbb{Q}\\ \text{Irracionales } \mathbb{I}\end{array}\right\} \text{Reales } \mathbb{R}$$

Actividad 1

1) Escriban 3 números racionales comprendidos entre -4 y -1.

2) Escriban 3 números irracionales comprendidos entre 1 y 3.

3) Ubiquen, aproximadamente, en la recta numérica los siguientes números reales:

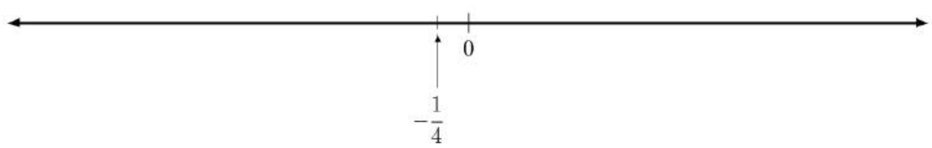
$$\sqrt{5} \ ; \ \tfrac{7}{2} \ ; \ -\tfrac{1}{2} \ ; \ 3{,}75 \ ; \ -6 \ ; \ -1{,}25 \ ; \ \sqrt{2} \ ; \ -\sqrt{3}$$

4) Dados los números 5,2 ; $-6{,}3$; $-0,\hat{2}$; 3 ; $\sqrt{10}$ indiquen:

a) los números enteros que no son naturales.
b) los números racionales que no son enteros.
c) los números reales que no son racionales.
d) los números reales que no son irracionales.

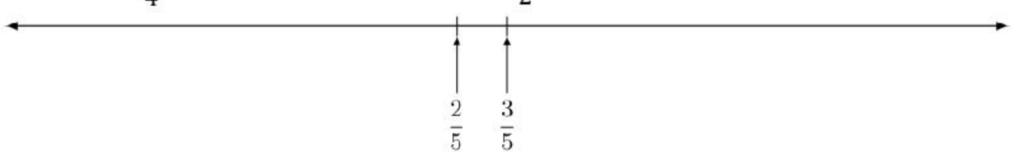
5) Ubiquen en la recta numérica los puntos a, b y c:

a)

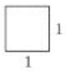


$a = -\dfrac{5}{4}$ $b = \dfrac{1}{2}$ $c = 2{,}5$

b)



$a = 0$ $b = -1$ $c = -0{,}4$

6) Dado el siguiente cuadrado, 

calculen su diagonal.

7) Calculen la diagonal de los cuadrados cuyos lados miden 4 cm. ; otro de 5 cm. y otro más de 9 cm. ¿Las diagonales obtenidas son números racionales o irracionales?

8) Completen con una cruz a qué campo numérico pertenecen los números indicados:

	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$-\sqrt{25}$	$\frac{5}{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{147}$	$\sqrt{1{,}44}$	$-\frac{18}{5}$	$\sqrt{28}$	0
$\mathbb{N}$											
$\mathbb{Z}$											
$\mathbb{Q}$											
$\mathbb{I}$											
$\mathbb{R}$											

9) Indiquen cada expresión como racional o irracional. Dar los números representados por las expresiones racionales.

$a)\ \sqrt[3]{4}$ $b)\ -\sqrt{25}$ $c)\ \sqrt{18}-\sqrt{16}$

$d)\ \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$ $e)\ 3\sqrt[3]{18}$ $f)\ \sqrt{\dfrac{24}{6}}$

$g)\ 2\sqrt{81}$ $h)\ -\sqrt{1{,}44}$ $i)\ \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$

$j)\ -\sqrt{35}+\sqrt{35}$ $k)\ \sqrt{121}-\sqrt{100}$ $l)\ \dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt{7}}$

10) Resuelvan las siguientes ecuaciones

$a)\ 2(x-3)+1=7-(5-3x)$ $b)\ \sqrt{2}\,x+6=\sqrt{8}$ $c)\ \dfrac{3}{5}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{10}$

$d)\ \dfrac{2}{3}\left(3x-\dfrac{7}{2}\right)=(x+1):\dfrac{6}{14}$ $e)\ 3+4x=9x+11$ $f)\ 4x^2+36=80$

$g)\ (0{,}125)^{-1}=x^3$ $h)\ 17-\sqrt{x^2-20}=6$ $i)\ \dfrac{2}{5}x-4=-8-x$

$j)\ 1-(2-x):3=9x-1$ $k)\ -12x^2=6-\sqrt{144}$ $l)\ x-\sqrt{12}=2\left(10x-\sqrt{3}\right)$

$m)\ 9+x^2=36$ $n)\ 2-x=3+x$ ñ) $2x+1=x+7$

Intervalos

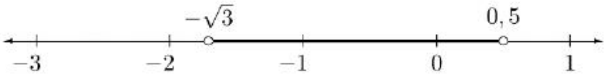
Un intervalo es la representación de un subconjunto de números reales. Para ello se utilizan los corchetes [ ] y los paréntesis( ), que indican si los extremos del intervalo están o no contenidos en el intervalo.

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos y al infinito. Es muy importante visualizarlos a través de la representación en la recta numérica.

Intervalo abierto a,b

El intervalo abierto a,b, que se simboliza $(a\,;b)$, contiene todos los números reales entre a y b, sin incluirlos, es decir, los que verifican la inecuación $a < x < b$.

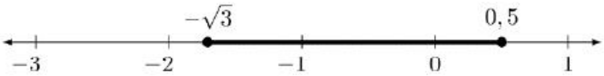
$\left(-\sqrt{3}\,;0{,}5\right)$ → contiene a todos los números reales x que cumplen que $-\sqrt{3} < x < 0{,}5$



Intervalo cerrado a,b

El intervalo cerrado a,b, que se simboliza $[a\,;b]$, contiene todos los números reales entre a y b, y a los propios a y b, es decir, los que verifican la inecuación $a \leq x \leq b$.

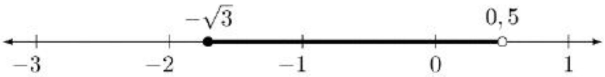
$\left[-\sqrt{3}\,;0{,}5\right]$ → contiene a todos los números reales x que cumplen que $-\sqrt{3} \leq x \leq 0{,}5$.



Otros intervalos de extremos a y b.

Algunos intervalos contienen solo uno de sus extremos.

$\left[-\sqrt{3}\,;0{,}5\right)$ → incluye a $-\sqrt{3}$, pero no a $0{,}5$ → $-\sqrt{3} \leq x < 0{,}5$

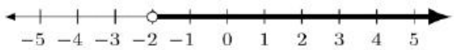


$\left(-\sqrt{3}\,;0{,}5\right]$ → incluye a $0{,}5$, pero no a $-\sqrt{3}$ → $-\sqrt{3} < x < 0{,}5$

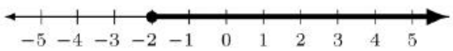
Intervalos al infinito

Algunos intervalos solo tienen un extremo. Para indicar que continúa, se usa el símbolo del infinito: ∞

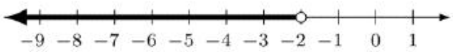
$(-2\,;\ \infty) \to x > -2$



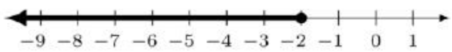
$[-2\,;\ \infty) \to x \geq 2$



$(-\infty\,;\ -2) \to x < -2$



$(-\infty\,;\ -2] \to x \leq 2$



Actividad 2

1) Escribí el intervalo que corresponde a cada inecuación y representa en la recta numérica.

$a)\ 0 \leq x < 3$ $\qquad b) -2{,}4 < x < -1{,}2$ $\qquad c) -\sqrt{5} < x \leq 2{,}2$

$d) -1{,}5 \leq x \leq -0{,}5$ $\qquad e)\ 1{,}1 \leq x < \sqrt[3]{7}$

En la recta numérica se indica con un punto lleno que el extremo está en el intervalo, y con uno vacío, que no está.

2) Escribí la inecuación que corresponde a cada intervalo y representa en la recta numérica.

$a)\ [1\,;2{,}5)$ $b)\ (-2{,}3\,;0]$ $c)\ \left(-0{,}5\,;\sqrt{2{,}5}\right)$

$d)\ (-1\,;5{,}1]$ $e)\ \left[\sqrt{3{,}6};\ -2{,}5\right]$

3) a) Escribí dos números racionales y dos irracionales del intervalo $(-1\,;\ -0{,}9)$.

b) ¿Cuántos números enteros hay en ese intervalo?

c) ¿Y en el intervalo $[-1\,;\ -0{,}9]$ cuántos enteros hay?

d) Escribí otro intervalo de extremos -1 y -0,9 que contengan algún número entero.

4) Escribí la inecuación que corresponde a cada intervalo y representá en la recta numérica.

$a)\ (-0{,}5\,;\ \infty)$ $b)\ (-\infty\,;5{,}1]$

$c)\ (-\infty\,;2{,}2)$ $d)\ [-3\,;\ \infty)$

5) Mirá cómo escribió cada alumno la inecuación correspondiente al intervalo $(-\infty\,;1]$ e indicá quién o quiénes se equivocaron.

$Carla{:}\, x \geq 1$ $Pablo{:}\, x \leq 1$ $Julián{:}\, 1 \leq x$ $Nicolás{:}\, 1 \geq x$

6) a) Escribí un intervalo abierto que contenga dos números enteros y ninguno natural.

b) Escribí un intervalo cerrado que contenga dos números naturales y ninguno entero negativo.

c) Si un intervalo tiene extremos diferentes ¿Puede no contener números racionales? ¿Por qué?

d) Escribí un intervalo que contenga todos los números naturales y ninguno entero negativo.

e) Escribí un intervalo que contenga todos los números enteros negativos y ninguno natural.

f) Escribí un intervalo que contenga todos los números irracionales.

Inecuaciones

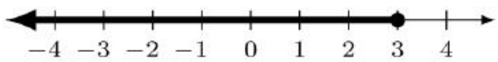
Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones que tienen uno o más valores desconocidos, similar a una ecuación. Una **desigualdad** es una expresión que contiene alguno de los símbolos de orden $>, \geq, <$ ó $\leq$. Las inecuaciones, por lo general, tienen infinitas soluciones que se representan mediante un intervalo. Para resolver las inecuaciones se siguen los mismos procedimientos que para resolver ecuaciones, con la única diferencia que existen operaciones que invierten en sentido de la desigualdad.

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
a)\ 4x+7 &\leq 19\\
4x &\leq 19-7\\
x &\leq \frac{12}{4}\\
x &\leq 3
\end{aligned}
$$

La solución escrita como intervalo es: $(-\infty\,;3]$

Su representación gráfica es:



$$
\begin{aligned}
b)\qquad 3x &< 9x+6\\
3x-9x &< 6\\
-6x &< 6\\
x &> \frac{6}{-6}\\
x &> -1
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Como dividimos entre -6, que es un número negativo, el sentido de la desigualdad cambia de menor a mayor.

La solución como intervalo es: $(-1\,;\infty)$

Su representación gráfica es:

Actividad 3

Resolvé las inecuaciones, escribí el intervalo que corresponda a la solución y representá en la recta numérica.

$a)\ 1-3x<4$

$b)\ -2x+5>x-4$

$c)\ 9-x\leq 4x+3$

$d)\ -2(x-5)\geq -3x+2$

$e)\ -x+\sqrt{3}\leq -2x-(x-1)$

$f)\ 4(x+2)>(x-1):0{,}5$

$g)\ 5(2x+3)<(2x+1)-4x$

$h)\ 2(x-1)\geq 3(x+2)$

$i)\ 20>5x+0{,}25$

$j)\ 2+\sqrt{8}\geq \sqrt{2}\,x+2\,\sqrt{2}$

$k)\ \frac{2}{3}-0{,}75\,x>x+1$

$l)\ \sqrt[3]{5}\,x-3<6\left(\frac{1}{4}x-0{,}8\hat{3}\right)$

Números Complejos (C)

Resolvamos la ecuación $-2x^2=50$

$$
\begin{aligned}
-2x^2 &= 50\\
x^2 &= 50:(-2)\\
x &= \sqrt{-25}
\end{aligned}
$$

La respuesta $x=\sqrt{-25}$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, ya que no hay ningún valor de x (número real) que elevado al cuadrado sea igual a -25.

Para resolver este tipo de ecuaciones se introduce un nuevo conjunto numérico llamado **conjunto de los números complejos.**

En este conjunto numérico se utiliza la letra "i" para sustituir a $\sqrt{-1}$.

Entonces $i=\sqrt{-1}$

La letra i es la parte imaginaria de un número complejo, por ejemplo:

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3i\longrightarrow unidad\ imaginaria$$

Entonces, la ecuación $-2x^2=50$ no tiene solución dentro de los números reales $\mathbb{R}$, pero sí, dentro del conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

$$x=\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=5i$$

La radicación de base negativa e índice par no tiene solución en el conjunto de los números reales ($\sqrt{-4}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[4]{-16}$; etc.), ya que no existe ningún número real que elevado a una potencia par dé por resultado un número negativo.

Se define entonces un nuevo número, llamado **i**, cuyo cuadrado es igual a **-1**. $\boxed{i^2 = -1}$

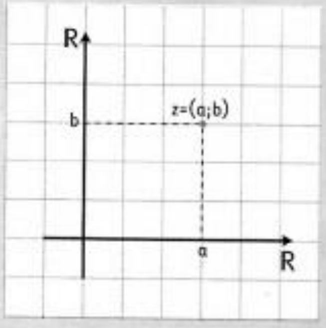
Dicho número es la **unidad imaginaria** en el conjunto de los **números complejos**. $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\,\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \pm 2i$ **b)** $\sqrt{-3} = \sqrt{3.(-1)} = \sqrt{3}\,\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \pm \sqrt{3}i$

Representación gráfica y expresión cartesiana de un complejo

Se define al conjunto de los números complejos **C** como:

$$C = \{(x;y) \in R^2 / x \in R \wedge y \in R\}$$



A cada número complejo le corresponde un punto del plano.

$z = (a;b)$ → **Expresión Cartesiana**

Componente real ← a; b → *Componente imaginaria*

Todos los números de la forma **(a;0)** son números reales y los de la forma **(0;b)** son números imaginarios puros.

Un número real es un número complejo cuya segunda componente es igual a 0. $\boxed{k = (k;0)}$

El número imaginario de segunda componente igual a 1 es la **unidad imaginaria**. $\boxed{i = (0;1)}$

Expresión binómica de un complejo

Para multiplicar un número complejo por un escalar, se multiplica cada componente del complejo por el escalar.

$$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = a(1;0) + b(0;1) = a + bi \longrightarrow \textbf{Expresión binómica}$$

Parte real $R_e(z)$ ← a; bi → *Parte imaginaria* $I_m(z)$

a) $z_1 = (3;4) = 3 + 4i$

b) $z_2 = (0;3) = 3i$

c) $z_3 = (-1;1) = -1 + i$

d) $z_4 = (-2;0) = -2$

El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

VERIFICACIÓN 1

• **Unan con una flecha cada número complejo con su expresión binómica.**

1) $(-1;1)$
2) $(-1;0)$
3) $(1;-1)$
4) $(1;1)$
5) $(0;-1)$

a) $-i$
b) $1 + i$
c) $-1 - i$
d) -1
e) $1 - i$
f) $-1 + i$

APLICACIÓN 1

Ejercicio 1.1

• **Representen gráficamente cada uno de los siguientes números complejos.**

1) $z_1 = 2 + 3i$
2) $z_2 = i$
3) $z_3 = (5;0)$
4) $z_4 = -3 + 5i$
5) $z_5 = (-3;0)$
6) $z_6 = (0;-3)$
7) $z_7 = -5 - 2i$
8) $z_8 = 5 - 2i$

Ejercicio 1.2

• **Hallen el valor de cada una de las siguientes raíces.**

1) $\sqrt{-9} =$
2) $\sqrt{-25} =$
3) $\sqrt{-5} =$
4) $\sqrt{-8} =$

Ejercicio 1.3

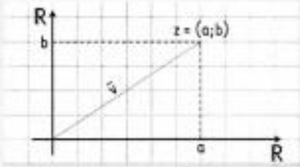
• **Hallen los valores reales de x e y que verifiquen las siguientes igualdades.**

1) $(2x;y + 2) = (4;-1)$
2) $\left(-\frac{1}{2}x + 3;-y + \frac{1}{4}\right) = (0;1)$
3) $3x - 1 + (1 - y)i = (2;3)$
4) $(2x - 5)i - 4y + 1 = 3 - i$

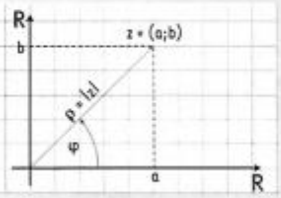
2 Módulo de un complejo. Complejos conjugados

Módulo de un complejo

A cada número complejo $\mathbf{z} = \mathbf{(a;b)}$ le está asociado un vector $\vec{\mathbf{v}}$, con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto (a;b). De este modo se puede hacer corresponder a cada número complejo un vector.



El módulo de ese vector es el **módulo del complejo** y se representa con la letra ρ.



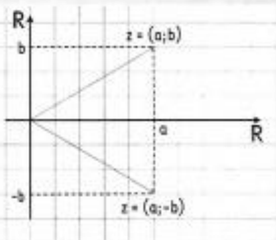
$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Al ángulo $\hat{\varphi}$ se lo llama **argumento**.

Complejos conjugados

*Dado un complejo z, se define como su **conjugado $\bar{z}$** al complejo que tiene la misma parte real y opuesta su parte imaginaria.*



$$\boxed{z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi}$$

Un complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje x.

a) $z_1 = 5 - 2i \Rightarrow \bar{z}_1 = 5 + 2i$ **b)** $z_2 = -1 + i \Rightarrow \bar{z}_2 = -1 - i$ **c)** $z_3 = -7i \Rightarrow \bar{z}_3 = 7i$

Módulo de un complejo. Complejos conjugados

VERIFICACIÓN 2

- **Hallen el módulo y el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos.**

1) $z_1 = 12 + 5i$ **2)** $z_2 = 3 - i$ **3)** $z_3 = -4 - 2i$

Ejercicios

1) Calculen las siguientes raíces:

$a)\ \sqrt{-25}$ $b)\ \sqrt{-144}$ $c)\ -\sqrt{-36}$

$d)\ \sqrt{-100}$ $e)\ -\sqrt{-49}$ $f)\ \sqrt{-81}$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones

$a)\ -4x^2+8=44$ $b)\ -x^2=16$ $c)\ 3x^2+30=4x^2+199$

$d)\ 32-x^2=58$ $e)\ 5x^2+1=7x^2+14$ $f)\ -5x^2+100=15^2$

$g)\ x^2+3(x^2-4)=-1612$ $h)\ \sqrt{2}\,x^2=\frac{3}{5}+4x^2$ $i)\ 3x^2-5(x^2+1)=2(x^2+3)-10$

3) Completen el siguiente cuadro:

Número Complejo	Componente Real	Componente Imaginario
$-4-10i$		
$\sqrt{3}+i$		
$1-i$		
$\frac{1}{2}i$		
$-\frac{1}{4}+5i$		
-9		

4) Indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es correcta o incorrecta.
Todo número real es número complejo.
Todo número complejo es número real.
Todo número irracional es número complejo.
Todo entero se puede escribir en la forma $a+bi$.
Todo número complejo se puede expresar en forma de número irracional.
Todo entero negativo se puede expresar en forma de un número imaginario puro.

5) para cada uno de los números complejos del ejercicio 3, graficar y hallar

a) módulo

b) complejo conjugado

Unidad II: Expresiones algebraicas enteras. Polinomios.

Una **expresión algebraica** es una combinación finita de números, letras, o números y letras, ligados entre sí por la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y/o la radicación. Los números se denominan **coeficientes** (salvo los exponentes de las potencias) y las letras, **variables** o indeterminadas.

$a)\ \frac{3-0{,}5w}{2} \qquad b)\ 3x^2-2^3 \qquad c)\ \sqrt{a}+c^5 \qquad d)\ \frac{3+z}{2} \qquad e)\ \frac{r+1}{s-2} \qquad f)\ \sqrt{5}x^5$

Cuando la variable no está afectada por una raíz o no actúa como divisor, las expresiones algebraicas son **enteras** y se denominan **polinomios.** Los ejemplos **c)** y **e)** no son polinomios; sí lo son **a), b), d) y f).**

Polinomios de variable x

Un **monomio** es un polinomio de un solo término y su grado es el valor del exponente de la variable x.

$a)\ \frac{1}{3}x \longrightarrow\ grado\ 1 \qquad b)\ 0{,}7x^3 \longrightarrow\ grado\ 3 \qquad c)\ 2{,}5 \longrightarrow\ grado\ 0 \qquad d)\ 2^5x^4 \longrightarrow\ grado\ 4$

Dos polinomios son **semejantes** cuando tienen el mismo grado, por ejemplo $-2x^2$ y $\frac{3}{4}x^2$.

Un **polinomio** es una suma algebraica de monomios y está **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.

$a)\ P(x) = \underbrace{-3x^2+5-0{,}4x+\frac{2}{7}x^3}_{reducido} \qquad b)\ Q(x) = 5x-6x^2+3x+x^2-4 = \underbrace{-5x^2+8x-4}_{reducido}$

El **valor numérico** de un polinomio es el valor que se obtiene al reemplazar **x** por algún número real.

$$P(x) = 5x^2+3x-7 \implies \begin{cases} P(2) = 5\cdot 2^2+3\cdot 2-7 = 20+6-7 = 19 \\ P(-1) = 5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-7 = 5-3-7 = -5 \end{cases}$$

El **grado** de un polinomio reducido es el grado de su mayor monomio no nulo.

El **coeficiente principal** es el coeficiente del monomio de mayor grado.

El **término independiente** es el coeficiente del monomio de grado cero.

Un polinomio está **ordenado** cuando los términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

$$\underbrace{3x-5x^3+4+2x^2}_{No\ está\ ordenado} = \underbrace{-5x^3+2x^2+3x+4}_{Orden\ decreciente} = \underbrace{4+3x+2x^2-5x^3}_{Orden\ creciente} \longrightarrow \begin{cases} grado: 3 \\ coeficiente\ principal: -5 \\ término\ independiente: 4 \end{cases}$$

Un polinomio está **completo** cuando tiene todas las potencias decrecientes del grado.

$a)\ P(x) = \underbrace{3x^4-2x+5x^2+1}_{No\ está\ completo} \qquad b)\ Q(x) = \underbrace{5+7x-4x^5+3x^2-x^4+2x^3}_{Está\ completo}$

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan con coeficiente 0.

$P(x) = 2-5x^4+3x^2 = -5x^4+0x^3+3x^2+0x+2$

Según la cantidad de términos un polinomio reducido recibe los siguientes nombres: si tiene 1 término, **mo**nomio; 2 términos, **tri**nomio; 4 términos, **cuatri**nomio; y luego, polinomio de **n** términos.

Actividades

1) Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.

$a)\ \dfrac{3-5^{-1}}{2}$	☐	$b)\ \sqrt{3x}=y$	☐	$c)\ 4x^{-3}$	☐
$d)\ \dfrac{7x^5}{x}$	☐	$e)\ 3z^4-\dfrac{1}{5}m^5$	☐	$f)\ \left(\sqrt{3}x-1\right):z$	☐
$g)\ 2a^{\frac{3}{4}}-5b^{\frac{1}{2}}$	☐	$h)\ \dfrac{6}{(x-y)^{-2}}$	☐	$i)\ \dfrac{4w^{-5}}{9w^{-3}}$	☐

2) Hallar el polinomio reducido en cada caso.

$a)\ 2x-x^2+2-7x+5x^2+3x-8$

$b)\ x^5-x^2-x+x^3-x^5+x-x^2-x^3+x$

$c)\ \frac{1}{2}x^3-5x-x^3+3x^2-4x-7-\frac{3}{2}x^3$

$d)\ 5x^4-3x+4x^2-0{,}5x+x^3-9+x$

$e)\ \frac{2}{3}-0,\hat{2}x^2+1,\hat{1}-\frac{5}{6}x^2-4x^4+\frac{5}{3}x^2$

3) Escribir un polinomio reducido que cumpla con cada una de las siguientes condiciones.

a) Binomio de grado tres y término independiente irracional.

b) Trinomio completo con coeficientes negativos.

c) Monomio de grado seis y coeficiente principal no entero.

d) Cuatrinomio de grado cinco y coeficientes irracionales.

4) Unir los polinomios iguales.

$a)\ 3-x^2+5x^3+0{,}2x^2+\frac{8}{10}x^2$

$b)\ \frac{1}{4}x^4-2x+6x^2-0{,}25x^4+3x-5x^2$

$c)\ 0,\hat{3}x-x^3+\frac{1}{2}x^4-7+x^3-\frac{1}{3}x+0{,}5x^4$

$d)\ -1{,}5x^3+2-x+\frac{1}{2}x^3+2x+x^2-6$

$e)\ \frac{5}{6}x^5-1{,}2x^3+x^2+0{,}1\hat{6}x^5+\frac{1}{5}x^3-x^2$

x^4-7

$x-4$

x^2-x^3

x^5-x^3

x^2+x

x^3+3

5) Completar y ordenar los siguientes polinomios

$a)\ -2x^3+5+x$

$b)\ 4+2x^5-3x^2-x$

$c)\ 5x-x^4+1$

$d)\ -2+x^3+4x-3x^6$

6) Determinar el grado de los siguientes polinomios

$a)\ 3x^2 - 1$ $b)\ 7x + 4$ $c)\ x^2 - 8$ $d)\ 6x^5 + x$

$e)\ 7x - 5x^3 - 1$ $f)\ 6x^2 - 4x + 9$ $g)\ x^4 + x^6 + 2$ $h)\ 8 + x + 3x^2 - 4x^3$

7) Señalen el valor numérico de las expresiones algebraicas dadas

$A)\ x^2 + \frac{1}{5} \qquad para\ \ x = \frac{2}{5}$

$a)\ 1$ $b)\ \frac{9}{25}$ $c)\ \frac{6}{25}$ $d)\ \frac{9}{5}$

$B)\ x + x^2 \qquad para\ \ x = -1$

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)\ -2$

8) Una cañita voladora es lanzada al aire. Su distancia d, en metros, después de t segundos de lanzamiento está dada por el polinomio: $d = 160t - t^2$

¿Qué distancia recorrió la cañita después de:

a) 1 segundo del lanzamiento?

b) 2 segundos del lanzamiento?

c) 10 segundos del lanzamiento?

Operaciones con monomios y polinomios

Adición y sustracción de monomios y polinomios

Monomios semejantes: son los que tienen idéntica parte literal.

Ejemplo: $3x^3\ es\ semejante\ a\ 4x^3$

Suma y resta de monomios: dos o más monomios sólo se pueden operar si son semejantes o sea si tienen la misma parte literal.

Ejemplo:

$a)\ 3x + 5x - 4x = 4x$ $b)\ 5x + 4x^2 = 5x + 4x^2$

Suma de polinomios

Sumar los polinomios:

$$
\begin{aligned}
M(x) &= -3x^3 + 2x - 4 \\
P(x) &= \underline{4x^3 + 3x^2 + 2x} \\
M(x) + P(x) &= (-3x^3 + 2x - 4) + (4x^3 + 3x^2 + 2x) \\
&= -3x^3 + 2x - 4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x \qquad \longrightarrow \quad suprimir\ paréntesis. \\
M(x) + N(x) &= x^3 + 3x^2 + 4x - 4 \qquad \longrightarrow \quad operar\ monomios\ semejantes.
\end{aligned}
$$

Regla práctica:

Es muy útil escribir los polinomios en columna haciendo coincidir los términos semejantes.

$$\begin{array}{rcr} M(x) & \rightarrow & 3x^3+0x^2+2x-4 \\ + & & \\ P(x) & \rightarrow & 4x^3+3x^2+2x+0 \\ \hline M(x)+P(x) & \rightarrow & x^3+3x^2+4x-4 \end{array}$$

Resta de polinomios

Resten los polinomios:

$$\begin{array}{rcll} Q(x) & = & -x^3+2x+4 & \\ R(x) & = & -x+4x^3-3x^2 & \\ \hline Q(x)-R(x) & = & (-x^3+2x+4)-(-x+4x^3-3x^2) & \\ & = & -x^3+2x+4+x-4x^3+3x^2 & \longrightarrow \textit{suprimir paréntesis.} \\ Q(x)-R(x) & = & -5x^3+3x^2+3x+4 & \longrightarrow \textit{operar monomios semejantes.} \end{array}$$

Regla práctica

Para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto del sustraendo, es decir, se le cambia el signo al sustraendo y se suman.

$$\begin{array}{rcr} Q(x) & \rightarrow & -1x^3+0x^2+2x+4 \\ - & & \\ R(x) & \rightarrow & -4x^3+3x^2+\ \ x+0 \\ \hline Q(x)-R(x) & \rightarrow & -5x^3+3x^2+3x+4 \end{array}$$

Actividades

1) Reduzcan términos semejantes:

$a)\ 5x^2+3x^2-4$

$b)\ 9x^2+4x-3x^2+3x$

$c)\ x+7+x-10-1$

$d)\ x^3-x^2+7x^2+10x^3+4$

2) Sumen y resten los polinomios dados:

$A(x)=6x^2-8x+7$

$C(x)=4x^3-12x^2-10x+8$

$E(x)=2x^3-3x^2+4x-7$

$B(x)=8x^3+2x^2-x-8$

$D(x)=2x^4+5x-12-3x^3$

$F(x)=-x^3+3-2x$

$a)\ A(x)+B(x)$

$b)\ A(x)-B(x)$

$c)\ C(x)+D(x)$

$d)\ C(x)-D(x)$

$e)\ E(x)+F(x)$

$f)\ E(x)\ -F(x)$

3) Completen los polinomios para obtener el resultado dado.

$a)$

$$\begin{array}{rrrr} & x^2 & \boxed{} & +10 \\ + & & & \\ & -5x^2 & +2x & \boxed{} \\ \hline & \boxed{} & +7x & -15 \end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{rrrr} & +8x^2 & \boxed{} & +3 \\ - & & & \\ \boxed{} & -1x^2 & +3x & -5 \\ \hline -6x^3 & \boxed{} & -6x & \boxed{} \end{array}$$

4) Supriman paréntesis y resuelvan.

$a)\ (5x^3 - 4x^2 + 1) + (-7x^3 + 2x^2 + 5)$

$b)\ (3x^2 - 8x + 4) - (-2x^2 - 3x)$

$c)\ (7x^3 - 5x^2) + (2x^3 + 5x^2 - x)$

$d)\ (4x^2 + 4x + 1) - (5x^2 - x + 8)$

$e)\ \left(7x^2 - 3x + \sqrt{2}\,\right) + \left(x^3 + x - \sqrt{2}\right)$

Multiplicación de monomios y polinomios

Multiplicación de monomios

Ejemplos:

$$a)\ 5x \cdot 3x = 5 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 15x^2$$

$$b)\ 3x \cdot (-4x^2) = 3(-4) \cdot x \cdot x^2 = -12x^3$$

Para tener en cuenta: al multiplicar las indeterminadas, sumamos sus exponentes ya que son un producto de potencias de igual base.

Multiplicación de polinomio por un monomio

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(3x^2 - 2x - 5) \cdot (-3x) &= 3x^2 \cdot (-3x) - 2x \cdot (-3x) - 5 \cdot (-3x) \\ &= -9x^3 + 6x^2 + 15x\end{aligned}$$

Multiplicación de polinomios

Ejemplo:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 7x - 1 + x^2 \\ M(x) &= \underline{3x - 2} \\ Q(x) \cdot M(x) &= (7x - 1 + x^2) \cdot (3x - 2) \\ &= 3x \cdot 7x + 3x \cdot (-1) + 3x \cdot x^2 - 2 \cdot 7x - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot x^2 \\ &= 21x^2 - 3x + 3x^3 - 14x + 2 - 2x^2 \\ Q(x) \cdot M(x) &= 3x^3 + 19x^2 - 17x + 2 \end{aligned}$$

Regla práctica: para facilitar los cálculos a veces es mejor disponer la multiplicación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lcl} Q(x) & \longrightarrow & 7x-1+x^2 \\ P(x) & \longrightarrow & \quad 3x-2 \\ \hline & & -14x+2-\ 2x^2 \\ & & -\ 3x+0+21x^2+3x^3 \\ Q(x)\cdot R(x) & \longrightarrow & -17x+2+19x^2+3x^3 \end{array}$$

Actividades

1) Calculen:

$a)\ (+5x)\cdot(-4x^2)$ $b)\ (-2x)\cdot(3x)$ $c)\ (+5a)\cdot(+4a)$

$d)\ (-a)\cdot(+6a)$ $e)\ (-6x)\cdot(+3x^2)$ $f)\ (-2a)\cdot(5a)$

$g)\ (+4x^2)\cdot(+5x^3)$

2) Calculen los productos:

$a)\ (x^2-2x+5)(-2x)$ $b)\ (4x^2-3x+2)(-x^3)$ $c)\ (3x^3-x-2)(4x^2)$

$d)\ (2x^2+4x+16)(3x-4)$ $e)\ (3y^2-3y+9)(2y+3)$ $f)\ (x^2+x+1)(x-3)$

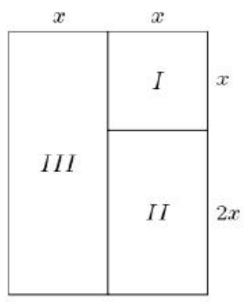
$g)\ (x^2-x+1)(x+1)$ $h)\ (x^2+2x-1)(3x+4)$ $i)\ (2x+3)(x^2-2)$

$j)\ (x+5)(x+2)$ $k)\ (3x+2)(2x+1)$ $l)\ (a^3-a^2+a-1)(a+1)$

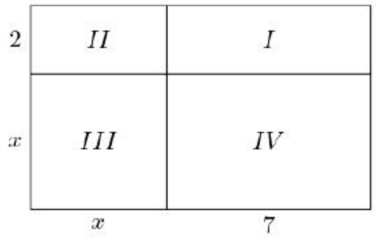
$m)\ (x+7)(x-4)$ $n)\ (3x+4)(2x-1)$ ñ) $(3x^2-4x-3)(x+1)$

$o)\ (x^2-3x-2)(x+2)$ $p)\ (x^2+5x-6)(2x+1)$

3) Calculen:
a) el área de la figura I
b) el área de la figura II
c) el área de la figura III
d) el área de toda la figura



4) Calculen el área de la figura de dos modos diferentes:
a) la figura total
b) la adición de las figuras I, II, III y IV



5) Dados los polinomios

$P(x) = x - x^3 - \frac{1}{2}$ $\qquad Q(x) = 2x + \frac{3}{2}$ $\qquad R(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 - x$

Hallen:

$a)\ 2P(x) - Q(x) - R(x)$ $\qquad b)\ 2Q(x) + 3P(x) - 4R(x)$

Productos notables

Hay ciertos productos que aparecen frecuentemente en el cálculo algebraico y son los llamados <u>productos notables</u>.

$$\textit{Cuadrado de un binomio}$$
$$(a+b)(a+b) = (a+b)^2$$
$$(a-b)(a-b) = (a-b)^2$$

$$\textit{Producto de la suma por la diferencia de dos términos}$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Cuadrado de un binomio

Cuadrado de la suma de dos términos

Observen:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Regla:

(1° término + 2° término)^2 = (1° término)^2 + 2(1° término)(2° término) + (2° término)^2

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(5+x)^2 &= 5^2 + 2\cdot 5\cdot x + x^2\\ &= 25 + 10x + x^2\end{aligned}$$

Cuadrado de la de dos términos

Observen:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Regla:

(1° término - 2° término)^2 = (1° término)^2 - 2(1° término)(2° término) + (2° término)^2

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(3-x)^2 &= 3^2 - 2\cdot 3\cdot x + x^2\\ &= 9 - 6x + x^2\end{aligned}$$

Regla práctica:

El cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término, más o menos el doble del producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término. A este desarrollo se lo llama **trinomio cuadrado perfecto.**

Producto de la suma por la diferencia de dos términos

Observen:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab + b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Regla:

(1° término + 2° término) (1° término - 2° término)= (1° término)^2 - (2° término)^2

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(x+5)(x-5) &= x^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 25\end{aligned}$$

Regla práctica

El producto de la suma por la diferencia de dos términos es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término. Este desarrollo se llama **diferencia de cuadrados.**

Actividades

1) Desarrollar el cuadrado del binomio

$a)\ (3+x)^2$ $b)\ (x+5)^2$ $c)\ (3x+2)^2$

$d)\ (2x+1)^2$ $e)\ (y^5+1)^2$ $f)\ (4x^2+7)^2$

$g)\ \left(2x+\frac{1}{2}\right)^2$ $h)\ (5-x)^2$ $i)\ (y-3)^2$

$j)\ (x^2-1)^2$ $k)\ (9x^2-1)^2$ $l)\ (2x-5)^2$

$m)\ (6y-4)^2$ $n)\ \left(y^2-\frac{1}{4}\right)^2$

2) Calcular los productos

$a)\ (x+3)(x-3)$ $b)\ (2x+5)(2x-5)$ $c)\ (3x^3-2)(3x^3+2)$

$d)\ (1+7x^2)(1-7x^2)$ $e)\ (3x^2-4)(3x^2+4)$ $f)\ (7-6x)(7+6x)$

$g)\ \left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)$ $h)\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $i)\ (5x+1)(5x-1)$

Ejercicios combinados

1) Dados los polinomios:

$A(x) = x - 1$ $B(x) = x^2 - 2x$ $C(x) = 2 - 3x^2 + 2x$ $D(x) = x + 1$

Resuelvan las siguientes operaciones identificando los productos notables que hubiera.

$a)\ B^2 - A$ $b)\ A \cdot B - C$ $c)\ A^2 - B$ $d)\ A \cdot D + B$

e) $C + 3 \cdot B$ *f)* $2 \cdot B - A \cdot D$ *g)* $C^2 + x \cdot B - 2x^2 A$ *h)* $C - 2 \cdot (B + A) + 4x^3 D$

2) Indiquen Verdadero o Falso. De ser falso, escriban la respuesta correcta.

$a)\ x^4 - 49 = (x^2 + 7)(x^2 + 7)$ $b)\ 4x^4 - 4 = (2x^2 + 2)(2x^2 - 2)$

$c)\ 4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)(2x + 3)$ $d)\ x^2 - 2x + 1 = (x + 1)(x - 1)$

$e)\ (2x - 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ $f)\ (5x + 3)(5x - 3) = 25x^2 - 9$

$g)\ 81 - x^4 = (9 + x)(9 - x)$ $h)\ x^6 - 6x^3 + 9 = (x^3 - 3)(x^3 - 3)$

$i)\ (5x - 4)(5x - 4) = 25x^2 - 40x + 16$ $j)\ x^2 + 25 = (x + 5)(x - 5)$

División de monomios y polinomios

División de monomios

Ejemplo:

$$8x^5 : 2x^3 = (8:2)(x^5 : x^3)$$
$$= 4x^2$$

Para tener en cuenta: al dividir la indeterminada restamos sus exponentes ya que es un cociente de potencias de igual base.

División de un polinomio por un monomio

Ejemplo:

$$(6x^5 + 3x^3 - 9x) : (-3x) = 6x^5 : (-3x) + 3x^3 : (-3x) - 9x : (-3x)$$
$$= -2x^4 - x^2 + 3$$

Actividades

1) Efectúen las siguientes divisiones de monomios:

$a)\ (2x^4) : \left(\frac{1}{4}x^2\right)$ $b)\ (-10x^2) : (5x^2)$ $c)\ (20x^3) : (0{,}5x)$

2) Realicen las divisiones.

$a)\ (8x^4 - 6x^3 + 10x^2) : (-2x^2)$ $b)\ (2x^2 + 6x + 4x) : (x)$

$c)\ (6x^5 - 9x^3 + 3x^2) : (3x)$ $d)\ (14x^3 - 28x^4) : (-7x^2)$

3) Resuelvan las operaciones combinadas con polinomios:

$a)\ (x+2)\cdot(x-2)+(2x-1)\cdot(x+1)$

$b)\ (2x-2)\cdot(3x-1)-(6x-1)\cdot(x+2)$

$c)\ 2x(2y+x)-3y(2x-y)+xy(2-y)$

$d)\ 8x^3-2x[y-2x(y-2x)-y]$

$e)\ \frac{1}{7}(105x^2-63x-84)-(120x^2-72x-96)$

$f)\ (x^2-2x):(-2x)+6(3x^2+x+2)$

$g)\ (6x^4-3x^3-x):(3x)+(x+5)\cdot(x+2)$

$h)\ 3x^2+(x+3)\cdot(x+4)-(2x^5+x^3):(-x^2)$

$i)\ x(2-x)^2+4x^2-7$

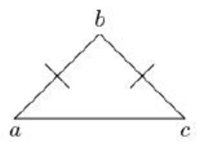
$j)\ (x^2+3)\cdot(x^2-3)+(2x^2+1)^2$

$k)\ (x+2)^2+(2x^2):\frac{1}{4}x^3+x\cdot(-x)$

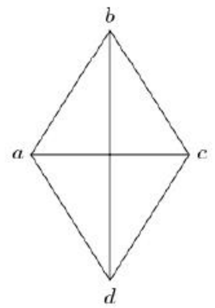
$l)\ (2x^3+3)\cdot(2x^3-3)-(8x^6-18):2$

6) Indiquen el dato que falta en los siguientes gráficos:

$a)\ Perímetro = 5x+7$
$\overline{ab} = 2x+1$
$\overline{ca} = ?$



$b)\ rombo\ abcd$
$superficie = x^2+x-12$
$\overline{bd} = x-2$
$\overline{ac} = ?$



Regla de Ruffini

Regla práctica para resolver determinadas divisiones de polinomios, aquellas en las que el polinomio divisor es de la forma $x \mp a$ siendo a número real.

Ejemplo:

$$P(x) = x^3-4x-1$$
$$Q(x) = x+3$$

Disposición Práctica:

Coeficientes de $P(x)$ completo y ordenado de forma decreciente $\longrightarrow$

Término independiente de $Q(x)$ cambiado de signo $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & -1 \\ & & & & \\ -3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Procedimiento:

El primer coeficiente del cociente es el primer término del dividendo, lo multiplicamos por -3 y al producto lo colocamos debajo del segundo coeficiente, sumamos los números de la segunda columna.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & -1 \\ & & sumar & & \\ -3 & \rightarrow & -3 & 9 & -15 \\ \hline & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{1 \quad -3 \quad 5}_{\text{coeficientes del cociente}}} & \underbrace{-16}_{Resto} \end{array}$$

El resultado del cociente de $P(x)$ con $Q(x)$ es:

$C = x^2 - 3x + 5$ $\qquad R = -16$

Para tener en cuenta: el cociente siempre resulta de un grado menor que el dividendo.

Teorema del resto

Dado un polinomio $P(x)$ como dividendo y un polinomio de la forma $(x \mp a)$ como divisor, el resto de la división se puede obtener calculando el valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = -a$ o sea “a” cambiada de signo.

$$P(-a) = resto$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} P(x) : Q(x) &= (3x^2 + 8x - 7) : (x + 1) \\ R &= P(-1) \\ &= 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) - 7 \\ &= 3 - 8 - 7 \\ R &= -12 \end{aligned}$$

Actividades

1) Resuelvan aplicando la regla de Ruffini:

$a)\ (2x^3 + 2x + 5 + 3x^2) : (x + 1)$ $\qquad b)\ (2 + 3x^4 - x^5) : (x - 3)$

$c)\ (3x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x) : (x + 1)$ $\qquad d)\ (x^2 - 10x + 20) : (x - 8)$

$e)\ (8x^4 - x + 3x^2) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$ $\qquad f)\ x^3 : (x - 5)$

2) Calculen el resto de las siguientes divisiones:

$a)\ (x^3 + 4x^2 + x + 5) : (x - 2)$ $\qquad b)\ (5x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$

$c)\ (3x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x + 1)$ $\qquad d)\ (2x^3 + x^2 - 18x - 7) : (x - 3)$

$e)\ \left(3x^3 - 12x^2 + 4x + \frac{1}{2}\right) : (x + 3)$ $\qquad f)\ (1 - x^3) : (x - 1)$

3) Determinen el valor de “b” para que la división sea exacta:

$a)\ (2x^2 + 5x + b) : (x - 2)$ $\qquad b)\ (x^2 - bx + 5) : (x - 1)$

$c)\ (x^3 + bx^2 - 5x + 7) : (x + 1)$

Autoevaluación

Indiquen la respuesta correcta:

1) La expresión $4x^2 + [2x - (4x^2 - 2x)]$ es igual a:

$a)\ 8x^2 - 4x$ $\quad b)\ 8x^2 + 4x$ $\quad c)\ 4x$ $\quad d)\ 8x^2$

2) La expresión $\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right) - \left(7x^2 - \frac{4}{3}\right)$ es igual a:

$a)\ 4x^2 - 1$ $\quad b)\ 4x^2 + 1$ $\quad c) - 4x^2 - 1$ $\quad d) - 4x^2 + 1$

3) El resultado de $-3a(-2a - 4)$ es:

$a)\ 6a^2 - 12a$ $\quad b)\ 6a^2 - 12a$ $\quad c) - 5a + 4$ $\quad d) - 5a - 4$

4) Siendo $B(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y $A(x) - B(x) = x^2 - 9x - 1$ entonces $A(x)$ es el polinomio:

$a)\ 4x^2 - 7x + 4$ $\quad b) - 2x^2 - 11x + 2$ $\quad c)\ 4x^2 - 7x + 2$ $\quad d)\ 4x^2 + 11x + 2$

5) Si $A(x) = 3x + 4$ y $B(x) = 5x - 3$ entonces $2B(x) - A(x) =$

$a)\ 7x + 10$ $\quad b)\ 7x - 10$ $\quad c)\ 2x + 1$ $\quad d)\ 2x - 7$

6) La expresión $\frac{1}{5}(15x^2 - 35x - 10) - \frac{1}{3}(45 - 12x - 6x^2)$ es:

$a)\ x^2 - 3x - 17$ $\quad b)\ 5x^2 + 3x + 17$ $\quad c)\ 5x^2 - 3x - 17$ $\quad d)\ 5x^2 - 3x + 17$

7) La expresión $x^2 - (x - 7)^2$ es igual a:

$a)\ 14x - 49$ $\quad b)\ 49 - 14x$ $\quad c)\ 2x^2 + 14x - 49$ $\quad d)\ 2x^2 - 14x + 49$

8) La expresión $(x + y)^2 - (x^2 + y^2)$ es igual a:

$a)\ 0$ $\quad b)\ 2xy$ $\quad c)\ 2x^2 + 2y^2$ $\quad d)\ 2xy - 2x^2 - 2y^2$

9) La expresión $\left(x^3 + \frac{1}{2}\right)\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)$ es igual a:

$a)\ x^9 + \frac{1}{2}$ $\quad b)\ x^9 - \frac{1}{4}$ $\quad c)\ x^6 + \frac{1}{4}$ $\quad d)\ x^6 - \frac{1}{4}$

10) El desarrollo de $\left(3x^5 - \frac{1}{2}\right)^2$ es:

$a)\ 9x^{10} - 2x^5 - \frac{1}{4}$ $\quad b)\ 9x^{10} - 3x^5 + \frac{1}{4}$ $\quad c)\ 9x^{10} - \frac{1}{4}$ $\quad d)\ 9x^{25} - \frac{1}{4}$

11) La expresión $(a^2 - 1)^2 - (a^2 - a)(a^2 + a)$ es igual a:

$a)\ 2a^4 + 1$ $\quad b)\ 3a^2 + 1$ $\quad c) - a^2 + 1$ $\quad d) - a^2 + 2$

12) Si $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 10$, entonces $x^2+\frac{1}{x^2}$ es igual a:

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 6$ $d)\ 8$

13) Al efectuar la división $(20x^3-8x):(-4x)=$ se cometió un error en la respuesta $-5x+2$
El error está en el:

$a)$ *signo del 2° término* $b)$ *coeficiente del 1° término*

$c)$ *exponente del 1° término* $d)$ *signo del 1° término*

14) Siendo $A(x)=6x^2-11x-11$ y $B(x)=3x+2$ el cociente entre $A(x)$ y $B(x)$ y el resto de la división son respectivamente:

$a)\ 2x-5\ y\ 1$ $b)\ 2x-5\ y\ 2$

$c)\ 2x-5\ y\ -1$ $d)\ 2x-5\ y\ -2$

15) El resto de la división $(3x^2-5x+4):\ (x+2)$ es:

$a)\ 0$ $b)\ 15$ $c)\ 20$ $d)\ 26$

16) El polinomio que dividido por $(2x+3)$ tiene por cociente a $(x-1)$ y de resto 6 es:

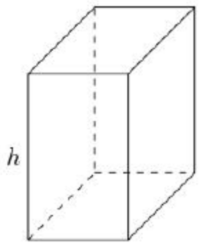
$a)\ 2x^2+x+3$ $b)\ 2x^2+x-3$ $c)\ 2x^2+5x+3$ $d)\ 2x^2+5x+9$

17) Indiquen sin hacer la división, en cuales de las operaciones dadas el resto es cero:

$a)\ (3x^2-2):(x-2)$ $b)\ (x^3+2x+3):(x+1)$

$c)\ (8+6x^2-12x-x^3):(x-2)$ $d)\ (3x^2-5x-2):(x-2)$

18) Indiquen cuál es a altura en el siguiente cuerpo:



$a)\ -x$ *Volumen de prisma*: x^3-6x^2+9x

$b)\ 3x$ *Base cuadrada*: $x-3$ *de lado*

$c)\ x$ h=?

$d)\ -3x$

Unidad III: Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio (o una función polinómica) significa que el polinomio expresado como sumas y restas lo podré expresar como un **producto del coeficiente principal y de polinomios mónicos primos**.

- ¿qué es un polinomio primo? son aquellos polinomios de grado no nulo que no pueden descomponerse como producto de otros polinomios de grado positivo menor. Solamente son primos los polinomios de grado uno y los de grado dos sin raíces reales.

Los polinomios que no son primos son compuestos. Todos los polinomios de grado impar mayor que uno son compuestos

- ¿qué es un polinomio mónico? Se llama así a un polinomio de grado y coeficiente principal igual a uno (ambos son iguales a 1)

La expresión para la **función polinómica** es $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, dónde ***n*** es unnúmero natural y los coeficientes ***a*** pertenecen al conjunto de los números reales.

La ***expresión factorizada*** de la función polinómica es de la forma $f(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdots (x - r_n)$ dónde a_n es el coeficiente principal, cada una de las raíces reales de la función son $r_1, r_2, \cdots\ r_n$.

Teorema fundamental del álgebra (TFA)

Recordemos que un valor de **x** es ***raíz*** de P(x) si el polinomio se anula para ese valor . Además, si P(x) está expresado como producto de otros polinomios, las raíces de éstos son las raíces de P(x).

Observen los siguientes ejemplos:

Polinomio expresado como producto	Raíces reales	Cantidad de raíces reales
$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$	$x = 1$; $x = 2$; $x = -3$	Tres
$Q(x) = (x - 7)(x - 4)(x - 4)$	$x = 7$; $x = 4$ (raíz doble)	Tres
$R(x) = (x + 5)(x + 5)(x + 5)$	$x = -5$ (raíz triple)	Tres
$S(x) = (x - 8)(x^2 + 1)$	$x = 8$	Una

Si al escribir un polinomio como producto hay más de un factor que tiene la misma raíz, a ésta se la llama *raíz* ***múltiple***. Por eso, $x = 4$ es *raíz doble* de Q(x) (se cuentan como *dos* raíces), y $x = -5$ es *raíz triple* de R(x) (se cuentan como *tres* raíces).

En la tabla anterior figuran las *raíces reales*, pero un polinomio puede tener raíces **reales** y raíces **no reales**. Existe un teorema, llamado **teorema fundamental del álgebra (TFA)**, a partir del cual podemos afirmar que **un polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces**, considerando las reales y las no reales.

Otra consecuencia de este teorema es la siguiente:

Un polinomio de grado *n* tiene como máximo *n* raíces reales.

Raíces	P(x) de grado tres	
Reales	.....	.....
No reales	0	.....
Total	3	.....

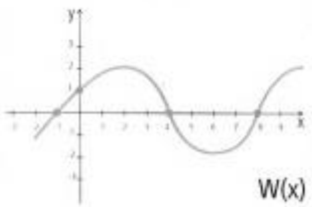
Las raíces no reales de un polinomio siempre vienen en parejas.

Por eso, un polinomio de grado tres puede tener una raíz real y dos raíces ...., o bien, tener tres raíces ....

Podemos enunciar otra consecuencia del TFA:

Un polinomio de grado impar tiene como .... una raíz real, es decir que su gráfico siempre tendrá contacto con el eje x.

Practiquen



W(x)

1. a) Indiquen las raíces del polinomio W(x).
   b) ¿Cuál es el mínimo grado posible de W(x)?
2. Indiquen si es cierto que todas las raíces del polinomio $R(x) = 2x^7 + 4x^2 - 2$ son *no reales.*
3. ¿Es posible que un polinomio de grado cinco tenga exactamente cuatro raíces reales?
4. Indiquen si es cierto que todas las raíces de un polinomio de grado par pueden ser *no reales.*
5. Analicen cuántas raíces *no reales* puede tener un polinomio de grado cuatro.

Raíces de polinomios de grados uno y dos

Para hallar la única raíz de un polinomio de grado uno, es decir de un polinomio de la forma $\mathbf{a}x + \mathbf{b}$, planteamos la ecuación $\mathbf{a}x + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ y despejamos x; entonces: $x = \frac{-\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

Ejemplo: $P(x) = 3x - 4 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x =$ .... es la raíz de P(x).

Para hallar las raíces x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado, es decir, de un polinomio de la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c}$, resolvemos la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ aplicando la fórmula resolvente. Si las raíces son reales, podemos escribir el polinomio mediante este producto: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - x_1) \cdot (\mathbf{x} - x_2)$.

Fórmula resolvente

Las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$) pueden obtenerse reemplazando los coeficientes a, b y c en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Para abreviar, las reunimos en una sola fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observaciones: como en esta fórmula hay una raíz cuadrada, si el *radicando* es negativo diremos que la ecuación que intentamos resolver *no tiene solución en el conjunto de los números reales.*

Si la ecuación es cuadrática, pero no tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, resolvemos todas las operaciones indicadas para reducirla a esa forma.

- **Si la ecuación no tiene término lineal ($b = 0$)**, se despeja directamente la incógnita.
- **Si la ecuación no tiene término independiente ($c = 0$)**, se extrae factor común x. En este caso, $x = 0$ es siempre una de las soluciones. La otra solución se obtiene igualando a 0 el otro factòr.

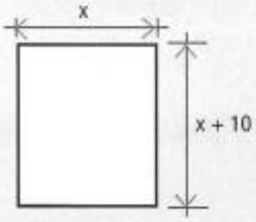
> $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ejemplo1: Resolvamos la ecuación $\mathbf{3x^2 - 2x - 1 = 0}$ aplicando la fórmula resolvente.

- Identificamos los coeficientes ⟶ $a = \ldots\ldots$ $b = \ldots\ldots$ $c = \ldots\ldots$
- Reemplazamos en la fórmula ⟶ $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{\ldots\ldots}$
- Operamos ⟶ $x_1, x_2 = \dfrac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots}}{6} = \dfrac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$
- **Atención con este paso:** el símbolo ± indica que una de las soluciones se obtiene usando el +, y la otra, usando el –, así:

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \Rightarrow x_1 = \ldots\ldots \\[2ex] x_2 = \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \Rightarrow x_2 = \ldots\ldots \end{cases}$$

Ejemplo 2: Un diagramador está definiendo las dimensiones que tendrá una revista. Necesita que el largo sea 10 cm mayor que el ancho y que la superficie de cada página resulte de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que cumplen ambas condiciones?



- Planteamos la ecuación ⟶ $x(x + 10) = \ldots\ldots$
- Aplicamos la propiedad distributiva ⟶ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$
- Pasamos 600 al primer miembro ⟶ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$
- Identificamos los coeficientes ⟶ $a = \ldots\ldots$ $b = \ldots\ldots$ $c = \ldots\ldots$

- Aplicamos la fórmula resolvente y calculamos:

$$x_1, x_2 = \frac{\ldots\ldots \pm \ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Como soluciones de la ecuación obtuvimos $\mathbf{x_1} = \ldots\ldots$ y $\mathbf{x_2} = \ldots\ldots$. Descartamos ...... porque no tiene sentido en este problema y concluimos que la revista tendrá .... cm de largo y .... cm de ancho.

Volvamos a los polinomios de grado 2 o polinomios cuadráticos,

Ejemplo: $Q(x) = x^2 + 5x - 6 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow x_1 = \ldots\ldots$ y $x_2 = \ldots\ldots$ son las raíces de Q(x), que puede escribirse así: ....

Raíces de polinomios de la forma $P(x) = ax^n + b$

Un polinomio de la forma $\mathbf{ax^n + b}$ (siendo **a** y **b** números reales distintos de 0) puede o no tener raíces reales. Si las tiene, éstas son una o dos.

Para hallar las raíces reales de un polinomio de esa forma, despejamos x de la ecuación: $\mathbf{ax^n + b = 0}$

Ejemplo 1: Hallemos las raíces reales de $R(x) = 2x^7 - 2$

$R(x) = 0 \Rightarrow 2x^7 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^7 = \dots\dots\dots \Rightarrow x^7 = \dots\dots\dots \Rightarrow \sqrt[7]{x^7} = \sqrt[7]{1} \Rightarrow x = \dots\dots\dots$

Ésta es la única raíz real del polinomio R(x).

Ejemplo 2: Hallemos las raíces reales de $S(x) = 5x^6 - 320$

$S(x) = 0 \Rightarrow 5x^6 - 320 = 0 \Rightarrow x^6 = \dots\dots\dots \Rightarrow \sqrt[6]{x^6} = \dots\dots\dots \Rightarrow |x| = \dots\dots\dots \Rightarrow x_1 = \dots\dots\dots$ y $x_2 = \dots\dots\dots$ son las únicas raíces reales de S(x).

Ejemplo 3: Intentemos hallar las raíces reales de $T(x) = 3x^4 + 27$

$T(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 + 27 = 0 \Rightarrow 3x^4 = -27 \Rightarrow x^4 = \dots\dots\dots\dots \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$, es decir que T(x) no tiene raíces reales.

Polinomios expresados como productos

Ya sabemos cómo hallar las raíces reales de polinomios de grados uno y dos, y de polinomios de la forma: $\mathbf{P(x) = ax^n + b}$. De ahora en más, cuando busquemos las raíces de un polinomio, lo que haremos es buscar sólo las **raíces reales**.

Ahora vamos a ver la ventaja de *expresar un polinomio como producto.*

Para estos ahora vamos a ver algunas técnicas (los casos de factoreo mas conocidos):

Tanto la "diferencia de cuadrados" como el "trinomio cuadrado perfecto" lo vimos como **PRODUCTOS NOTABLES**, por lo cual vamos a ver los otros dos casos que faltarían y la combinación de los mismos.

Factor común

A veces sucede que en un polinomio P(x) la variable x figura en todos los términos. En estos casos, es muy conveniente *extraer factor común.*

Observen cómo extraemos la variable x como factor común: *la extraemos elevada a la menor de sus potencias.*

También, en algunos ejemplos, hemos extraído un número que es factor en todos los coeficientes.

Después dividimos cada término del polinomio por el factor común.

Ejemplos:

$E(x) = 7x^5 + 5x^4 + x^3 = x^3(7x^2 + 5x + 1)$

$F(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 2x^2(\dots\dots\dots - 3x + \dots\dots\dots)$

$G(x) = -4x^7 - 8x^3 + 4x^2 + 16x = \dots\dots\dots(- \dots\dots\dots - \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots\dots\dots)$

Siempre podemos controlar que el producto que obtuvimos es correcto aplicando la propiedad distributiva.

Factor común por grupos

Algunos polinomios presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo 1: $V(x) = 7x^5 - 5x^4 + 14x - 10$

Formamos dos grupos, uno rojo y el otro azul ⟶ $V(x) = (7x^5 - 5x^4) + (\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* x^4 en el grupo rojo y *factor común* 2 en el grupo azul ⟶ $V(x) = x^4(\ldots\ldots) + 2(\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* $(7x - 5)$ en **todos** los términos ⟶ $V(x) = (7x - 5)(\ldots\ldots)$

Ejemplo 2: $W(x) = 3x^8 + x^7 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 2$

Formamos .... grupos ⟶ $W(x) = (3x^8 + x^7 - 2x^5) + (3x^3 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* .... en el primer grupo ⟶ $W(x) = \ldots\ldots + (3x^3 + x^2 - 2)$

Sacamos *factor común* .... en todos los términos ⟶ $W(x) = \ldots\ldots$

Puede ocurrir que la *técnica* del factor *común por grupos* esté combinada con algunas de las otras técnicas. En el siguiente ejemplo, $Y(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$, observen con atención cómo el *factor común (–1)* del segundo paso da lugar a la aparición del *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos:

Formamos dos grupos ⟶ $Y(x) = (x^6 - x^4) + (\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* $\mathbf{x^4}$ en el primer grupo y *factor común* **(–1)** en el segundo grupo ⟶ $Y(x) = x^4(\ldots\ldots) + (-1)(\ldots\ldots)$

Sacamos *factor común* $(x^2 - 1)$ en todos los grupos ⟶ $Y(x) = (x^2 - 1)(\ldots\ldots)$

Descomponemos la *diferencia de cuadrados* que apareció en ambos factores ⟶ $Y(x) = (\ldots\ldots)(x + 1)(x^2 - 1)(\ldots\ldots)$

Nueva *diferencia de cuadrados* en $(x^2 - 1)$ ⟶ $Y(x) = (x - 1)(x + 1)(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)(x^2 + 1)$

Finalmente ⟶ $Y(x) = (\ldots\ldots)^2 . (\ldots\ldots)^2 . (\ldots\ldots)$

Practiquen

7. Expresen los siguientes polinomios como productos:
   $O(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2$ $P(x) = -x^3 + 2x^2$
8. Hallen las raíces de O(x) y P(x) del ejercicio 7.
9. Sobre la base de O(x) y P(x) del ejercicio 7, hallen las raíces de O(x) . P(x) y determinen la multiplicidad de cada una.
10. Expresen $Q(x) = x^6 - x^2$ como producto de polinomios del menor grado posible.
11. Hallen las raíces de Q(x) del ejercicio 10.
12. Hallen las raíces de los siguientes polinomios:
    $R(x) = 3x^7 - 12x^5$ $S(x) = -x^3 + 16x$
    $T(x) = 2x^5 - 32x$ $U(x) = 3x^8 - 3x^2$

13. Apliquen factor común por grupos a los siguientes polinomios:
    $A(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ $B(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 3$
    $C(x) = 3x^5 + x^4 - 3x - 1$ $D(x) = 4x^3 + 8x^2 + 8x + 16$
14. Hallen las raíces de los polinomios del ejercicio 13.
15. Con los resultados del ejercicio 13, expresen como producto los polinomios: $E(x) = A(x) . C(x)$ y $F(x) = [D(x)]^2$
16. Formen grupos de dos términos y apliquen factor común por grupos a: $G(x) = x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9$
17. Expresen los siguientes polinomios como productos de polinomios del menor grado posible:
    $G(x) = x^6 - 9x^4 - 256x^2 + 2\,304$
    $H(x) = 2x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 2$
    $I(x) = x^8 + x^6 - 64x^2 - 64$
    $J(x) = x^{10} - x^6 - x^4 + 1$
18. Hallen las raíces de los polinomios del ejercicio 17.
19. Hallen las raíces de los siguientes polinomios:
    $K(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 + x^2 + x - 2$
    $L(x) = x^6 + x^5 - 6x^4 - x^2 - x + 6$
    $M(x) = 3x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 3x^2 + 12x - 9$
    $N(x) = -2x^8 + 12x^7 - 18x^6 + 2x^2 - 12x + 18$

Actividad: Colocar una X a los polinomios correctamente factorizados

a)	$5x + 10x^2 = 5(x + 2x^2)$			d)	$x^7 - x^5 = x^4(x^3 - x)$	
b)	$3x^4 + 6x^2 = 3x^2(2 + x^2)$			e)	$15x^3 - 20x^2 + 5x = 5x(1 + 3x^2 - 4x)$	
c)	$x^3 - x = x(1 - x^2)$			f)	$12x^2 - 4x^3 + 20x^4 = 2x^2(6 - 2x + 10x^2)$	

Raíces de polinomios con coeficientes enteros. Teorema de Gauss

Consideremos el polinomio $P(x) = 27x^3 + 3x - 10$, que tiene todos sus coeficientes enteros.

Calculemos $P\left(\frac{2}{3}\right)$ = ...

Como $P\left(\frac{2}{3}\right)$ = ..., resulta que $x = \frac{2}{3}$ es una raíz de P(x).

Observen que esa raíz es una fracción que cumple con estas dos condiciones:

- El numerador 2 divide al coeficiente independiente **–10.**
- El denominador 3 divide al coeficiente principal **27.**

El teorema de Gauss, que generaliza esta situación, afirma que:

Cuando una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, p divide al coeficiente independiente y q divide al coeficiente principal

Entonces, para hallar las raíces .... de un polinomio con coeficientes ...., debemos seguir estos pasos:

- Hallar los divisores p del coeficiente independiente y los divisores q del coeficiente ....
- Formar con ellos .... irreducibles $\frac{p}{q}$, que son las **posibles raíces.**
- Especializar el polinomio en estas fracciones para ver si alguna es .... de él.

Ejemplo: Hallemos las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

- Verificamos que todos los coeficientes de P(x) son enteros: .... , ... y .... $\in$ **Z.**
- Hallamos los divisores p del coeficiente independiente: .... y ....
- Hallamos los divisores q del coeficiente principal: ...., ..., ... y ....
- Formamos todas las fracciones irreducibles $\frac{p}{q}$: ...., ..., ... y ....
- Especializamos el polinomio P(x) en cada una de las cuatro fracciones:

$P(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 1 \neq 0$

$P(......) = 2(......)^3 + 3(......)^2 - 1 .... 0$

$P(\text{——}) = 2(\text{——})^3 + 3(\text{——})^2 - 1 .... 0$

$P(-\text{——}) = 2(-\text{——})^3 + 3(-\text{——})^2 - 1 .... 0$

Entonces, las raíces racionales de P(x) son: ....

Más acerca del teorema de Gauss

Supongamos que un polinomio tiene raíces racionales.
Si el polinomio es **mónico**, sus posibles raíces racionales son números enteros y **son los divisores del coeficiente independiente.**

Ejemplo: Busquemos las raíces racionales de: $P(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x - 6$

Al ser P(x) un polinomio mónico (coeficiente .... igual a ....), sus posibles raíces racionales son los divisores de ...., es decir: ....

Probemos con $x = 1$: $P(....) = ...^4 - 4(....)^3 + ...^2 + 8(....) - 6 = ...$ => $x = 1$ .... raíz de P(x).

Como $x = 1$ es raíz de P(x), resulta que P(x) es divisible por $(x - 1)$. Hagamos la división utilizando la regla de Ruffini y expresemos P(x) mediante el producto de $(x - 1)$ por Q(x).

$P(x) = (x - 1) \, . \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{Q(x)}$

Busquemos ahora las raíces de $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$.

Observamos que las posibles raíces racionales de Q(x) son .... que las de P(x).

Para hallarlas, podríamos utilizar el teorema de Gauss; sin embargo, Q(x) tiene una estructura que nos permite aplicar *factor común por grupos:*

$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x^3 - 3x^2) - (2x - 6) = x^2 \, . \, (.............) - ..... \, . \, (.............) = (x - .....)(x^2 - .....)$

La única raíz racional de Q(x) es $x =$ ...., ya que del factor $(x^2 - 2)$ se desprende que $x =$ .... o que $x =$ ...., que no son números ....

Entonces, las raíces racionales de P(x) son: ....

Observen que si en este ejemplo hubiésemos aplicado sólo el teorema de Gauss, no habríamos podido hallar las raíces irracionales.
A veces tenemos polinomios cuyos coeficientes no son enteros y, sin embargo, también podemos buscar sus raíces racionales aplicando el teorema de Gauss.

Observen cómo trabajamos con el polinomio $P(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

Lo multiplicamos por 2 y obtenemos este otro polinomio: $Z(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$
Hallen las raíces racionales de Z(x) y verifiquen que son las mismas que las de P(x):

$x_1 =$ .... $x_2 =$ .... $x_3 =$ ....

Practiquen

24. Hallen las raíces racionales de los siguientes polinomios:
$A(x) = 3x^3 + 5x^2 - 11x + 3$ $B(x) = 8x^3 - 8x^2 + 1$
$C(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$ $D(x) = 16x^4 - 16x + 7$

25. Hallen las raíces racionales de P(x):
$P(x) = x^4 - 3x^3 + (\frac{13}{4})x^2 - (\frac{3}{2})x + (\frac{1}{4})$

26. Extraigan factor común y hallen las raíces racionales de F(x) y de G(x):
$F(x) = 2x^3 + 8x^2 - 10$
$G(x) = -5x^5 + 15x^3 + 40$

Ejercitación de cierre

1) Factorizar los siguientes trinomios

a) $x^2 + 2x - 15 =$ b) $x^2 - 6x + 8 =$ c) $x^2 - 3x - 18 =$

2) Factorizar los siguientes polinomios

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 =$
b) $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 =$
c) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 =$
d) $x^4 - 5x^2 + 4 =$
e) $x^4 + 2x^3 - x - 2 =$
f) $x^5 - x^4 - 16x + 16 =$

3) Marcar con una X los polinomios correctamente factorizados

a) $3x^3 - 12x^2 + 6 = 3x(x^2 - 4x + 2)$ ☐
b) $x^2 + 0{,}25 + x = (x + 0{,}5)^2$ ☐
c) $25x^2 - 100 = (5x + 10)(5x - 10)$ ☐
d) $x^4 + 1 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$ ☐
e) $x^3 - 1 = (x - 1)^3$ ☐
f) $2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$ ☐

4) Unir cada trinomio con su factorización

a) $x^2 + 5x - 4$	I. $(x + 7)(x - 2)$
b) $x^2 - 14x + 49$	II $(x - 7)(x + 7)$
c) $x^2 - 5x - 14$	III $(x - 7)(x - 2)$
d) $x^2 + 9x + 14$	IV. $(x + 7)(x + 2)$
e) $x^2 + 14x + 49$	V. $(x + 7)(x + 7)$
f) $x^2 - 9x + 14$	VI. $(x - 7)(x + 2)$
	VII. $(x - 7)(x - 7)$

5) Factorizar aplicando el procedimiento que corresponda

a) $-1{,}25x^3 + 1{,}875x^4 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x^5 =$

b) $25x^2 - 30x + 9 =$

6) Hallar las raíces y factorizar

a) $x^3 - 2x^2 - 29x + 30 =$

b) $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 =$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 =$

d) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 =$

7) Factorizar los siguientes polinomios combinando los procedimientos

a) $6x^5 + 12x^4 + 18x^3 + 36x^2 =$

b) $5x^6 - 30x^5 - 80x^4 =$

c) $36x^4 + 64x^2 - 96x^3 =$

d) $3x^7 + 36x^5 + 18x^6 + 24x^4 =$

e) $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32 =$

f) $x^6 + 3x^5 - x - 3 =$

g) $12x^6 + 8x^5 - 108x^4 - 72x^3 =$

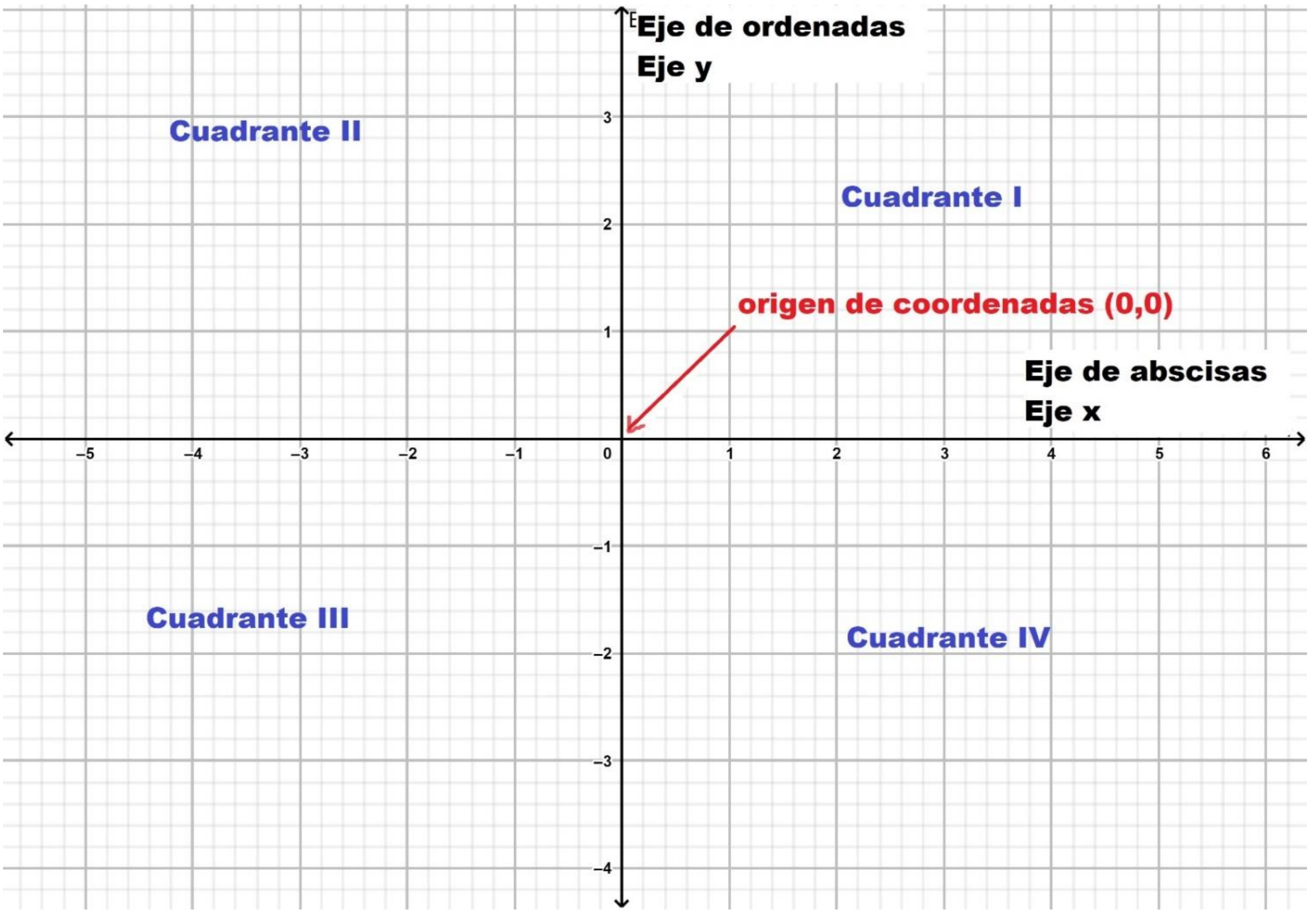
h) $4x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 24x + 16 =$

Unidad IV: Funciones

Antes de empezar el tema tendremos que ver cómo se ubican los puntos en el plano y aprender a interpretar gráficos. Por esto tenemos que ver algunos nuevos términos y cuestiones a tener en cuenta.

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

Primero tengamos en cuenta que para representar punto en el plano vamos a considerar dos ejes ortogonales (perpendiculares). Ya saben cómo ubicar los números en la recta real, ahora a esa recta le agregamos otra recta perpendicular que la cruza por el punto 0. Ahora vemos en el gráfico que la recta real es la recta horizontal que la denominaremos "**eje x**" ó "**eje de abscisas**", la recta perpendicular al eje x que trazamos por el 0 la denominaremos "**eje y**" ó "**eje de ordenadas**". La intersección de ambas rectas, de ambos ejes, es en el punto **(0,0)** al cual llamaremos **origen de coordenadas**:

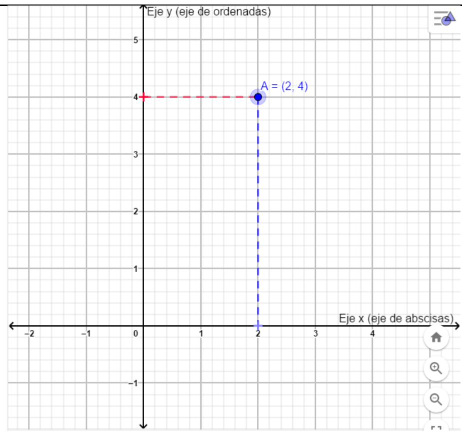


Para ubicar un punto en el plano es necesario usar dos referencias, cada una se llama **coordenada**.

La primera coordenada suele marcarse en el eje horizontal y se la denomina **coordenada x** ó **abscisas**. La otra coordenada es la **coordenada y** u **ordenada** y se marca en el eje vertical. La ubicación del par (a;b) está determinada por la intersección entre la ubicación a en el eje x y la ubicación b en el eje y.

Por ejemplo, si queremos marcar el punto **A=(2;4)**

- nos fijamos sobre el eje x el valor 2, ahí marcamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 2 (azul), y luego
- sobre el eje y nos ubicamos sobre el valor 4, trazamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 4 (roja),
- por último, la intersección de esas líneas punteadas determinan el punto A!!

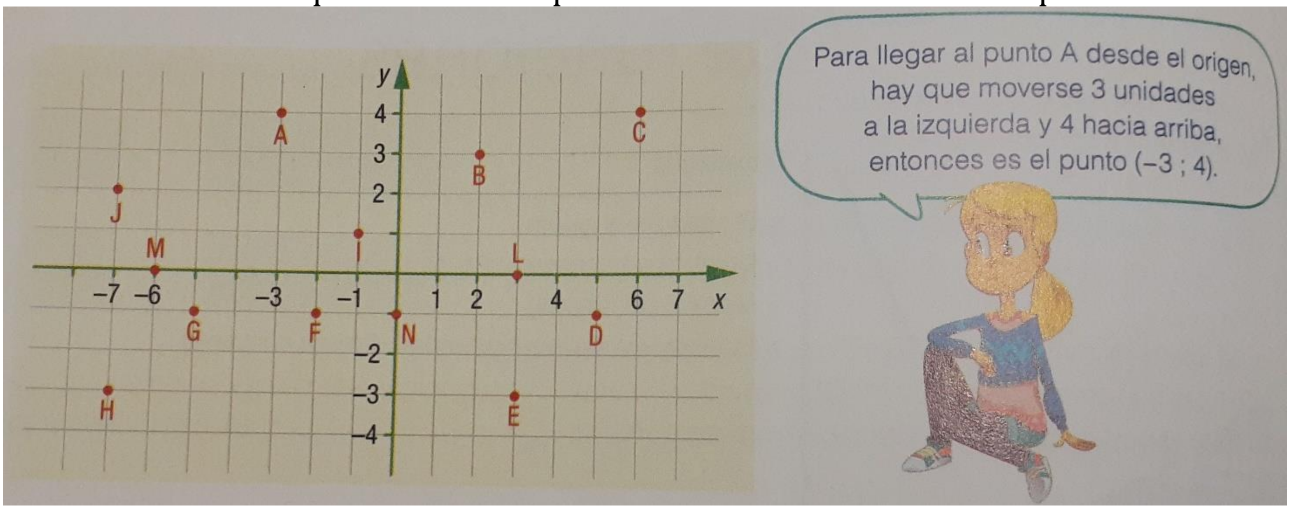


Por si aún no están claras lo del plano cartesiano y cómo se ubican los puntos, te sugiero que veas el video del Profesor Carreón: https://www.youtube.com/watch?v=kzOzYY-T-50 ó los videos del Profe Alex:

- https://www.youtube.com/watch?v=ftGVWXo1Khc (partes del plano cartesiano: abscisas, ordenadas, origen de coordenadas, cuadrantes, ubicación de puntos)
- www.youtube.com/watch?v=QTrE4x5DPZ8 (ubicación de puntos en el plano)
- www.youtube.com/watch?v=M-KzreZqXO0 (ubicación de puntos en el plano con fracciones)

Vamos a ponernos a prueba con las siguientes actividades!

Actividad 1: Lean lo que dice la chica para indicar las coordenadas del punto A



Ahora escriban los datos de los otros puntos en la siguiente tabla:

Punto	Abscisa	Ordenada	Coordenadas del punto	Cuadrante
A	-3	4	(-3;4)	II
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				

J				
L				
M				
N				

Actividad 2: Ubiquen los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados.
A=(-1;2) B=(4;-3) C=(0;1) D=(-3;0) E=(0;0) F=(-3;-5) G=(-2;4)

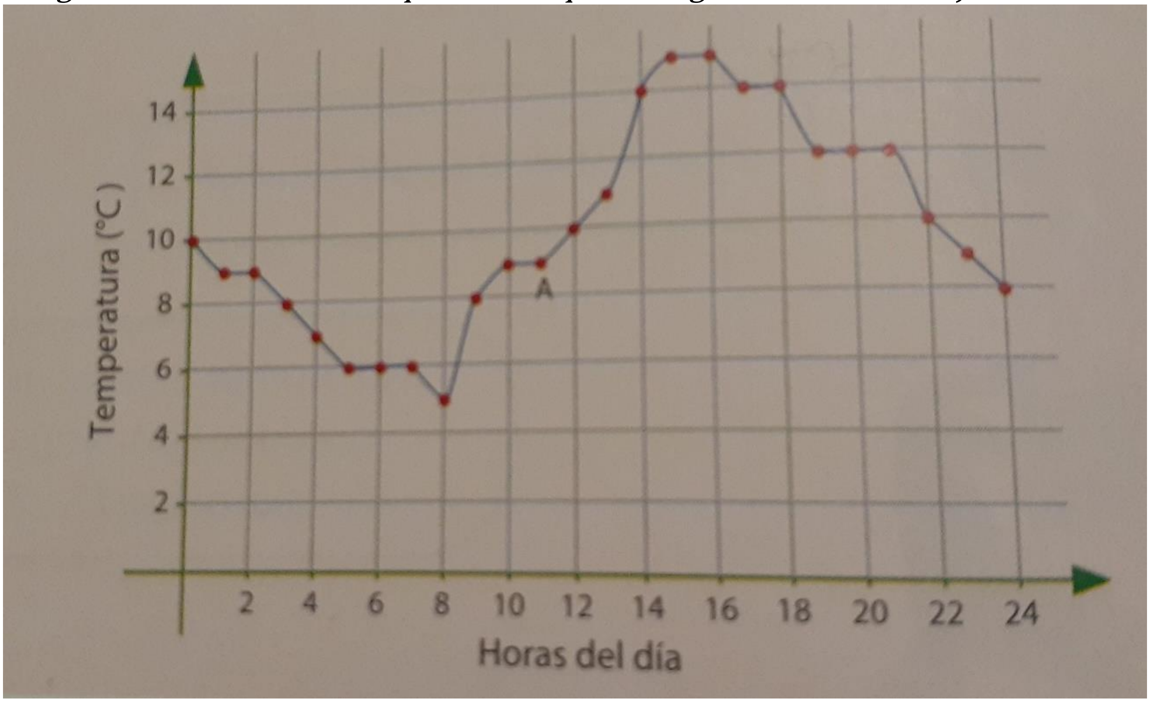
<u>**LECTURA DE GRÁFICOS**</u>

Para poder analizar qué quieren decir los puntos en un gráfico, deben observar qué se está representando en cada eje. Por ejemplo si en el eje horizontal se están graficando las horas del día y en el vertical la temperatura en grados centígrados, un punto (2,9) indica que a las 2 de la mañana hacía 9°C

Veamos dos ejemplos para analizar algunas cuestiones

<u>Ejemplo 1</u>:

El siguiente gráfico muestra las temperaturas que se registraron el 21 de junio de 2017



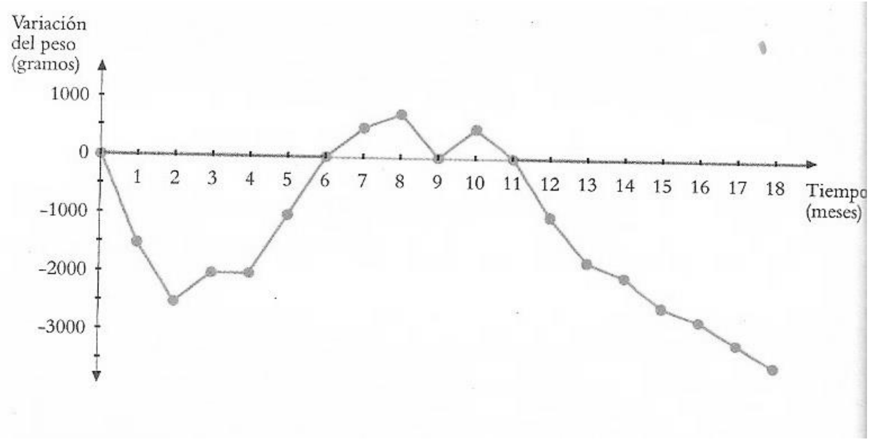
- ¿Qué información brinda el punto A de la gráfica? *El punto A indica que a las 11 hs se registraron 9°C*
- ¿Cuál fue la temperatura mínima de ese día? ¿A qué hora se produjo? *La temperatura mínima fue de 5°C y se produjo a las 8 hs*
- ¿A qué hora se registró la temperatura máxima? *No hubo una sola temperatura máxima ya que a las 15 hs y a las 16 hs se registraron 15°C*
- ¿En qué horarios la temperatura se mantuvo constante? *Desde la 1 hasta las 2 de la mañana, desde las 5 hs hasta las 7 hs inclusive, desde las 10 hs hasta las 11 hs, desde las 15 hs hasta las 16 hs, desde las 17 hs hasta las 18 hs y desde las 19 hs hasta las 21 hs.*
- ¿Qué temperatura hacía a las 6 de la tarde? *14°C*
- ¿En qué horas la temperatura fue de 14°C? *A las 14 hs, 17 hs y 18 hs*

- ¿En qué horas la temperatura superó los 12°C? *Los 12°C se superaros desde las 13:30 hs hasta casi las 19 hs.*
- ¿En qué horas la temperatura fue bajando? *Desde las 0 hasta la 1, desde las 2 hasta las 5, desde las 7 hasta las 8, desde las 16 hasta las 17, desde las 18 hasta las 19 y desde las 21 hasta las 24 hs.*

<u>Ejemplo 2</u>:

Una doctora nutricionista registra una vez al mes, en un gráfico cartesiano, la variación del peso en gramos de sus pacientes en función del tiempo.

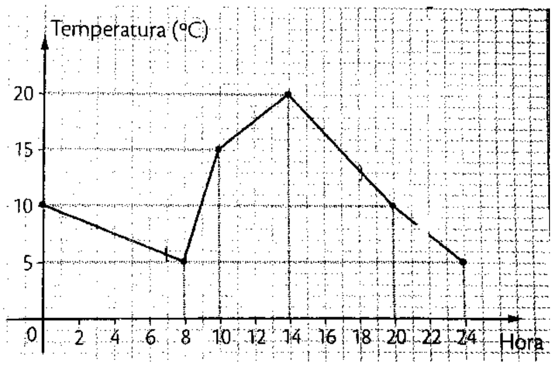
El siguiente gráfico corresponde a la señora Juana, quien comenzó la dieta con 98kg y realiza su consulta con la doctora una vez por mes.



a) ¿Cuánto pesaba en la tercera consulta? *En la tercer consulta llevaba bajado 2000 grs=2 kg así que pesaba 96 kg.*
b) ¿Cuánto aumentó entre el cuarto y quinto mes? *Sólo aumentó 1 kg*
c) ¿En qué mes esta paciente alcanzó su menor peso? ¿Y el mayor? *El menor peso lo alcanzó a los 18 meses de haber empezado con la nutricionista, mientras que el mayor peso lo registró a los 8 meses de haber empezado*
d) ¿En qué períodos bajó de peso? *Desde que empezo hasta e 2do mes, entre el 8vo y 9no mes y desde el décimo mes hasta el mes 18.*
e) ¿En qué períodos subió de peso? *Entre el 2do y 3er mes, desde el 5to al 8vo mes, y entre el 9no y 10mo mes*
f) ¿Hubo algún momento en el que su peso no varió? *Entre el 3er y 4to mes su peso no varió*
g) ¿En qué meses la paciente volvió a pesar lo mismo que al comenzar el tratamiento? Pesó 98 kg en el 6to mes, en el 9no y en el decimoprimer mes.

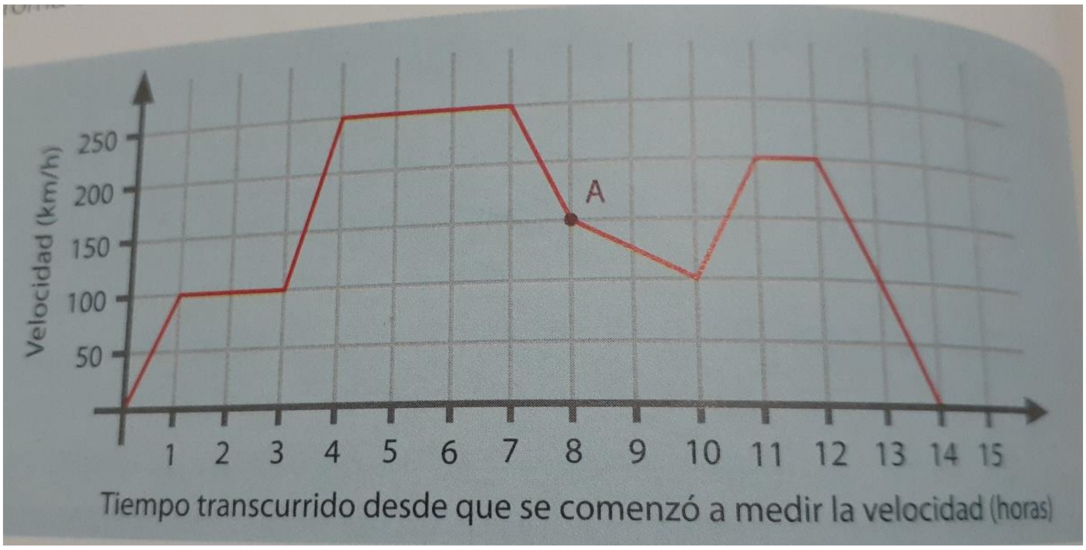
Ahora es tu turno de interpretar los gráficos así que te dejo varias actividades para pensar!!

Actividad 3: El siguiente gráfico muestra las distintas temperaturas que se registraron en Buenos Aires durante un día del año.

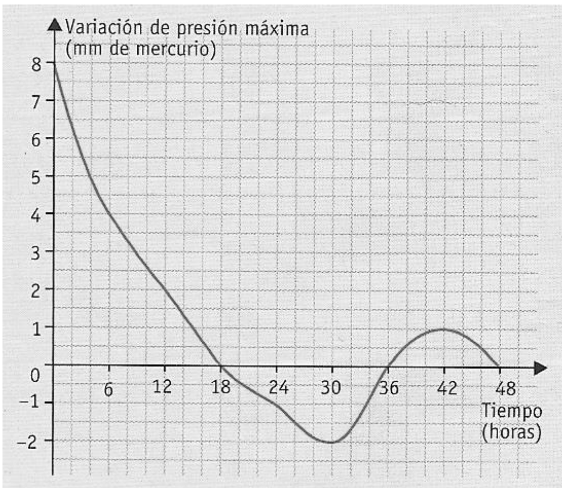


a) ¿Qué significa el punto (10;15)?
b) Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿La temperatura fue de 0°C en algún momento? ¿Por qué?
d) ¿Posee punto máximo? ¿Cuál? ¿en qué hora del día se registró?
e) Mencionar los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura fue mayor a 12°C

Actividad 4: Un ingeniero analiza la variación de la velocidad de un auto en un tiempo determinado. Toma ciertas medidas y arma este gráfico:



a) ¿Qué está representando en cada eje? ¿en qué unidades mide?
b) ¿Qué información da el punto A?
c) A las 5 hs de comenzar las mediciones, ¿cuál era la velocidad? ¿Cómo te das cuenta?
d) ¿En qué momento la velocidad fue de 200 km/h? ¿Cómo te das cuenta?
e) ¿En qué momentos la velocidad se mantiene constante? ¿Cómo te das cuenta?
f) ¿Cuál es la escala en el eje de las ordenadas? ¿Cuánto representa cada cuadradito?
g) ¿En qué momentos la velocidad fue de 0km/h? ¿Dónde te fijas?
h) ¿En qué momentos la velocidad aumenta?



Actividad 5: Un paciente entra en una sala de urgencias de un hospital para ser atendido por el aumento de su presión arterial. Durante un cierto tiempo se lo conecta a una máquina que le controla la presión continuamente y produce un gráfico. En él aparece representada <u>la variación de la presión máxima</u> del paciente, <u>respecto de la considerada normal</u> (12 mm de mercurio), a partir del momento de su internación.

a) ¿Con qué presión máxima ingresó el paciente al hospital?
b) ¿Qué representan en este gráfico los valores negativos que figuran en el eje vertical?
c) ¿Tuvo presión máxima normal en algún momento durante su internación?
d) De acuerdo a lo que se observa en el gráfico, ¿durante cuánto tiempo estuvo este paciente en observación?

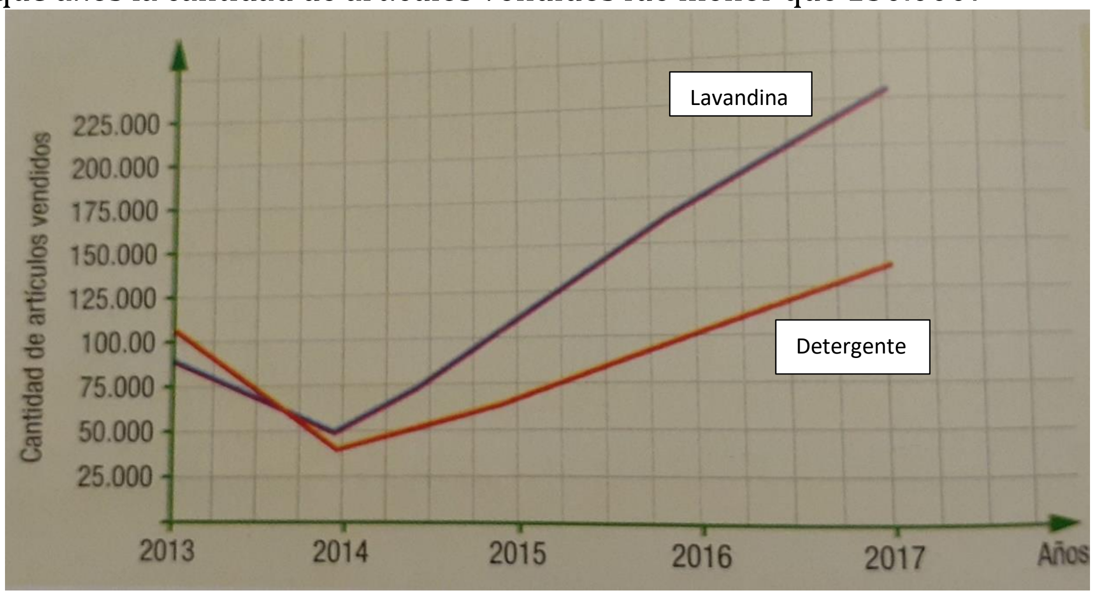
Actividad 6: La temperatura media registrada en el mes de agosto de 2017 en la ciudad de Magdalena fue de 6°C. Este gráfico muestra la variación respecto de esa temperatura durante el 6 de agosto de 2017

a) ¿Qué información da el punto A del gráfico?
b) ¿Cuál fue la temperatura a las 0 hs? ¿Y a las 10 hs?
c) ¿A qué hora la temperatura era de 6°C? ¿Y de 7°C? ¿y de 5°C? ¿Dónde observan estos datos en el gráfico? Explica con tus palabras.
d) ¿Cuáles fueron, ese día, la temperatura máxima y mínima? ¿En qué momento se registraron?
e) ¿En qué momentos del día la temperatura fue mayor a 4°C?
f) ¿En qué periodo del día subió la temperatura? ¿En qué períodos bajó? ¿en qué períodos se mantuvo constante?
g) ¿En qué período del día hubo temperaturas por debajo de 0°C?
h) Completar la tabla con las temperaturas que se registraron el 6 de agosto

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temp (°C)													

Actividad 7: En una empresa de fabricación de artículos de limpieza analizan las ventas de lavandina y detergente en el período 2013-2017 (rojo: detergente; lila: lavandina)

a) ¿En qué período la venta de detergentes disminuyó?
b) ¿En qué año se produjo la menor venta de lavandina?
c) En el período 2015-2017, ¿el crecimiento de la venta de qué artículo fue mayor? ¿cómo te das cuenta?
d) En qué años la cantidad de artículos vendidos fue menor que 150.000?



Actividad 8: En una dietética venden harina integral a $52,50 el kilogramo

a) Completar la tabla

Cantidad de harina (kg)	**1**	**2**	**4**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**
Precio a Pagar (S)								

b) Representar los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos
c) ¿Tiene sentido unir los puntos graficados? Explicá cómo lo pensaste
d) Escribí la cuenta que pueden hacer para calcular el precio que hay que pagar si concoes la cantidad de kilogramos que se compran
e) ¿Cuántos kilogramos de harina pueden comprar con $1155? ¿y con $624,75? ¿Por qué?

Actividad 9: En un laboratorio ponen a calentar un líquido que hierve a los 120°C. La fórmula que permite calcular la temperatura del líquido hasta que hierva es $T(h) = 5h + 15$, dónde h son los minutos desde que empezó la medición

a) Completar la tabla

Tiempo (minutos)	**0**	**2**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
Temperatura (°C)								

b) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos
c) ¿Cómo expresarías, con tus palabras, la forma de calcular la temperatura del líquido en cualquier momento?

Actividad 10: Juan sale de su casa en auto a las 8 de la mañana a una velocidad de 60 km/h.

a) Completar la tabla

Tiempo de viaje (horas)	**2**	**3**	**5**	**6**	**10**
Distancia recorrida (km)					

b) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular la distancia recorrida si conocen las horas de viaje
c) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular las horas de viaje si conocen la distancia recorrida
d) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos
e) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

Concepto de Función

Teoría

Una relación entre dos conjuntos numéricos A y B es un conjunto de pares ordenados (x; y), con la condición de que $x \in A \wedge y \in B$.

Ejemplo: $R: A \rightarrow B \wedge A = \{0; 1; 2\} \wedge B = \{3; 4; 5; 6\}$

a) $R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ b) $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ c) $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Una relación es una función cuando se cumplen dos condiciones:

1) Todos los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B (existencia).
2) Cada elemento del conjunto A se relaciona con un único elemento del conjunto B (unicidad).

Del ejemplo anterior:
En R_1, el 0 se relaciona con 2 elementos del conjunto B, el 3 y el 4 (no cumplen con la condición de unicidad).
En R_2, el 0 no está relacionado con ningún elemento del conjunto B (no cumple con la condición de existencia).
En R_3, todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, es función.

$f: A \rightarrow B \wedge f = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \rightarrow 5 \text{ es la "imagen" de 0 y 0 es la "preimagen" de 5} \\ f(1) = 6 \rightarrow 6 \text{ es la "imagen" de 1 y 1 es la "preimagen" de 6} \\ f(2) = 3 \rightarrow 3 \text{ es la "imagen" de 2 y 2 es la "preimagen" de 3} \end{cases}$$

1 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = \{2;4;7;8\} \wedge B = \{1;3;5;7;9\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
2	1
4	1
7	1
8	1

b)

x	y
7	1
7	3
7	5
7	9

c)

x	y
2	3
8	1
4	5

d)

x	y
8	1
7	5
4	9
2	3

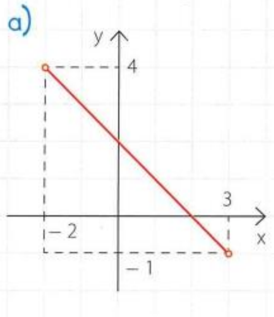
e)

x	y
8	5
4	3
7	1
2	9
8	7

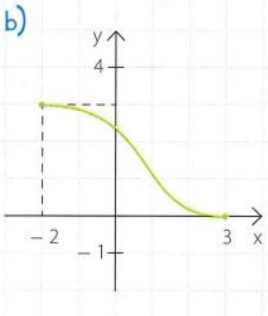
2 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = [-2;3] \wedge B = [-1;4]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.

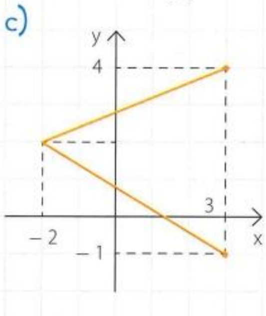
a)



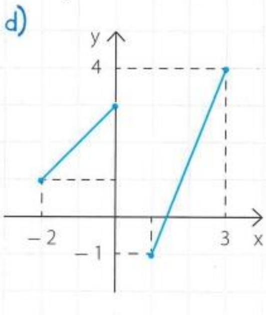
b)



c)

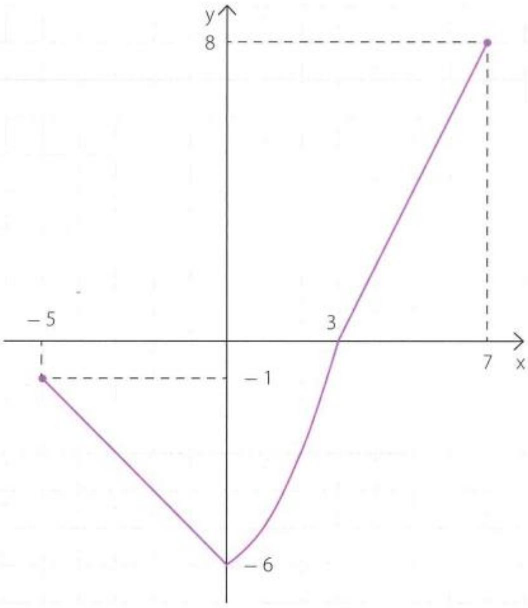


d)



3 **Observar el gráfico de la función y responder.**

a) ¿Cuál es la imagen de 3?
b) ¿Y cuál la de – 3?
c) ¿Cuál es la preimagen de 2?
d) ¿Y cuál la de 4?
e) ¿En qué valor de x la función vale 0?
f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?
g) Escribir dos valores de x con la misma imagen.



Completar según corresponda.

h) $f(2) = \square$
j) $f(-4) = \square$
i) $f(\square) = 6$
k) $f(\square) = 8$

Dominio e imagen de una función

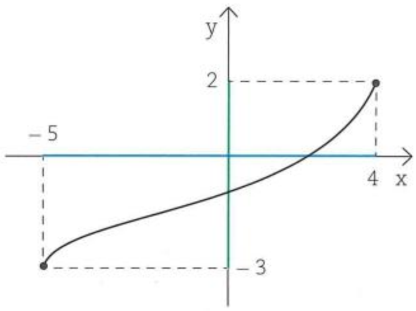
Teoría

En una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su **dominio** es un conjunto de números reales que pueden ser valores de **x**; y su **imagen**, los que pueden ser valores de **y**.

a) En la función f, el dominio son los valores marcados en azul; y la imagen, los marcados en verde.

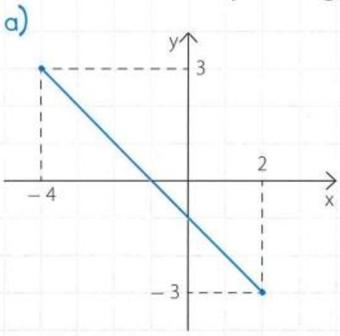
$$f : \underbrace{[-5 ; 4]}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{[-3 ; 2]}_{\text{Imagen}}$$

b) En la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, el dominio son los reales positivos; y el cero, al igual que su imagen: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

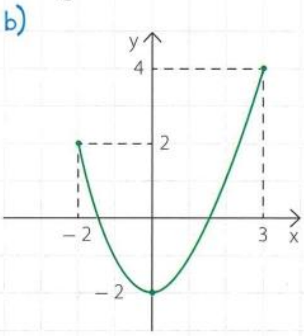


4 **Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.**

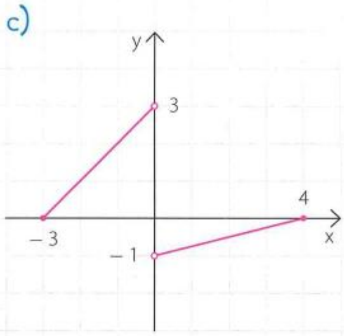
a)



b)



c)



5 **Hallar el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x - 1$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
d) $f(x) = \sqrt{x - 3}$
e) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$
f) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

Desafío

6 **Decidir si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar.**

a) $R_1 : N_0 \to N_0 \wedge R_1(x) = x - 1$
b) $R_2 : N \to Q \wedge R_2(x) = \sqrt{x}$
c) $R_3 : N_0 \to Q \wedge R_3(x) = \frac{x}{x + 5}$

Conjuntos de ceros o raíces, positividad y negatividad

Teoría

- El **conjunto de ceros** o **raíces** de una función son los valores de x que determinan que $f(x) = 0$.

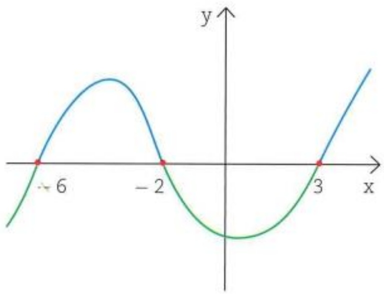
  $f(-6) = 0 \wedge f(-2) = 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow C^0 = \{-6\,;-2\,;3\}$

- El o los **conjuntos de positividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea positiva, o sea, que $f(x) > 0$, (gráfica en azul).

  $C^+ = (-6\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$

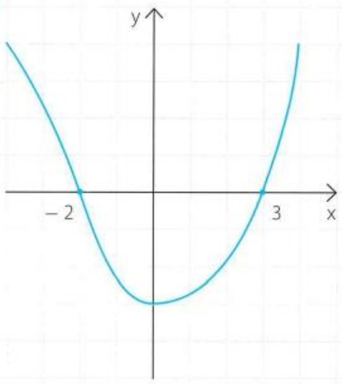
- El o los **conjuntos de negatividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea negativa, o sea, que $f(x) < 0$, (gráfica en verde).

  $C^- = (-\infty\,;-6) \cup (-2\,;3)$



7 Escribir los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones.

a)

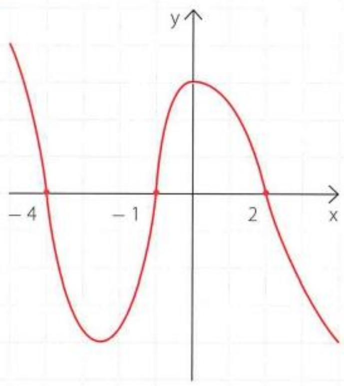


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

b)

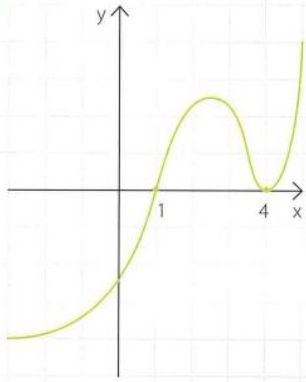


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

c)



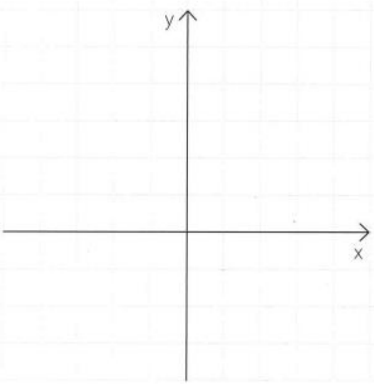
$C^0 =$

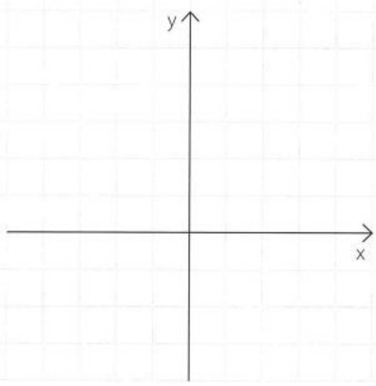
$C^+ =$

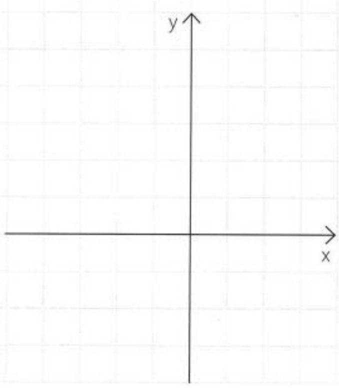
$C^- =$

8 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a) $f(1) = 0 \wedge f(-3) = 0 \wedge f(0) > 0$ b) $C^0 = \{-2\,;0\,;3\} \wedge f(-5) < 0 \wedge f(1) < 0$ c) $f(-4) = 0 \wedge f(0) = 0 \wedge C^- = \varnothing$







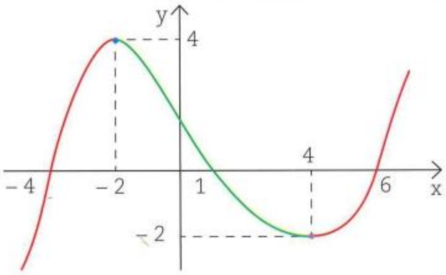
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teoría

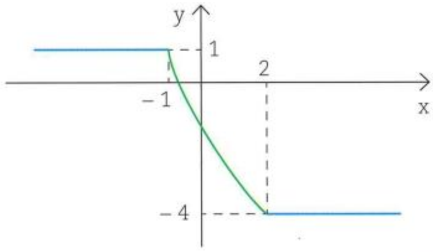
Si a medida que los valores de x aumentan, el valor de la función aumenta, entonces, la función **crece**; pero si disminuyen, entonces, la función **decrece**.
En $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$, la función no crece ni decrece. Los puntos $(-2\ ;4)$ y $(4\ ;-2)$ se denominan **máximo** y **mínimo relativo**, respectivamente.

Crecimiento: $(-\infty\ ;-2)\cup(4\ ;+\infty)$.

Decrecimiento: $(-2\ ;\ 4)$.



Cuando al aumentar los valores de x, los valores de la función no varían, la función no crece ni decrece, sino que se mantiene **constante**.
$f(-3) = f(-2) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(3) = f(4) = -4$
La función es constante en: $(-\infty\ ;-1)\cup(2\ ;+\infty)$.

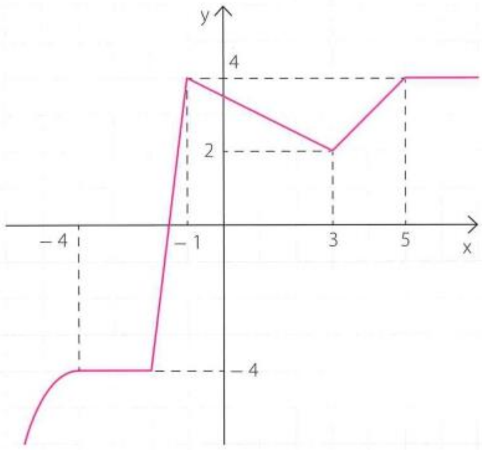


9 **Observar el gráfico y escribir.**

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

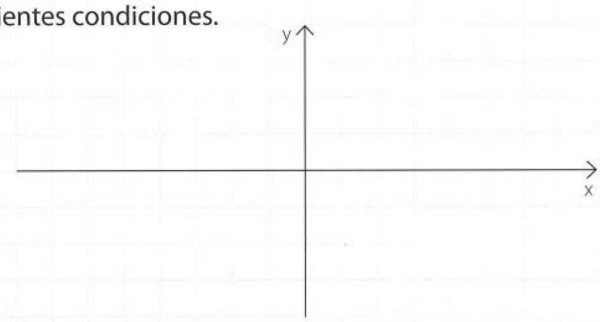
b) El o los intervalos donde es constante.

c) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



10 **Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones.**

- Crecimiento: $(-\infty\ ;-5)\cup(2\ ;+\infty)$
- Es constante: $(-5\ ;-2)$
- $f(-7) = f(0) = f(5) = 0$
- Mínimo relativo en $(2\ ;-2)$



Desafío

11 **Indicar cuáles de las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.**

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 1 - x$

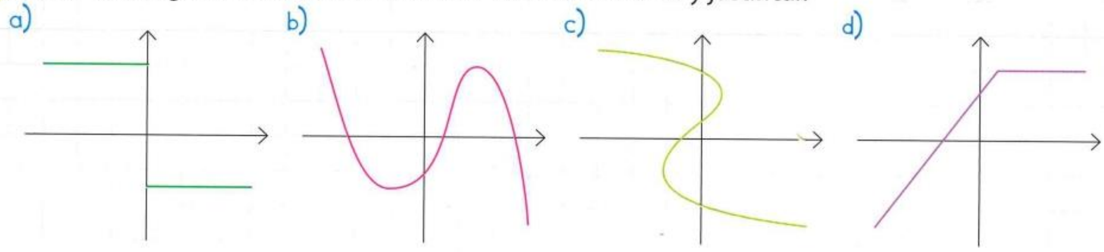
d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = x^3$

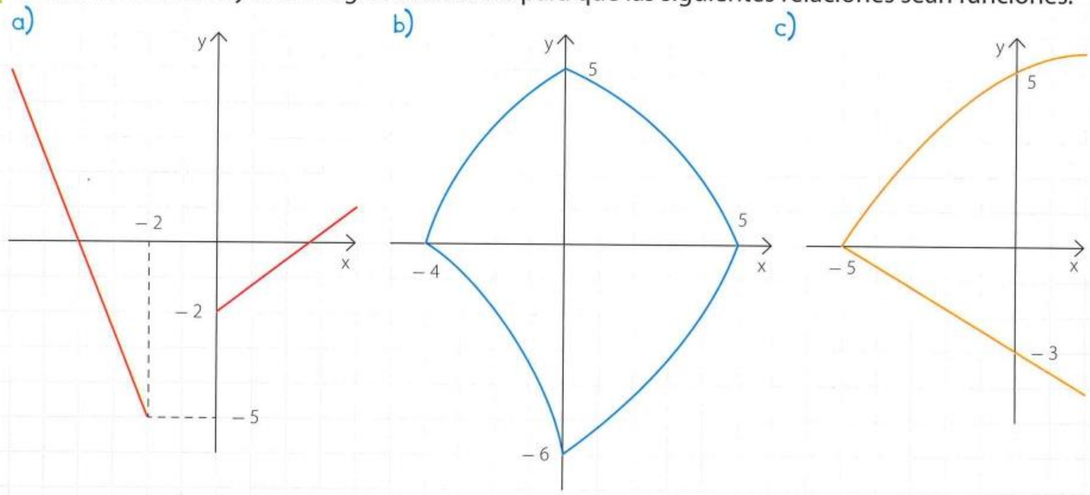
f) $f(x) = -7$

Repaso

12 Indicar si las siguientes relaciones de R: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones y justificar.



13 Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.



14 Observar el gráfico de la función y responder.

a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?

b) ¿Cuáles son las raíces?

c) ¿Cuál es la imagen de – 2?

d) ¿Y cuál la de 0?

e) ¿Cuáles son las preimágenes de – 4?

f) ¿En qué intervalo la función vale 8?

Colocar >, < o = según corresponda.

g) f(2) $\square$ f(4)

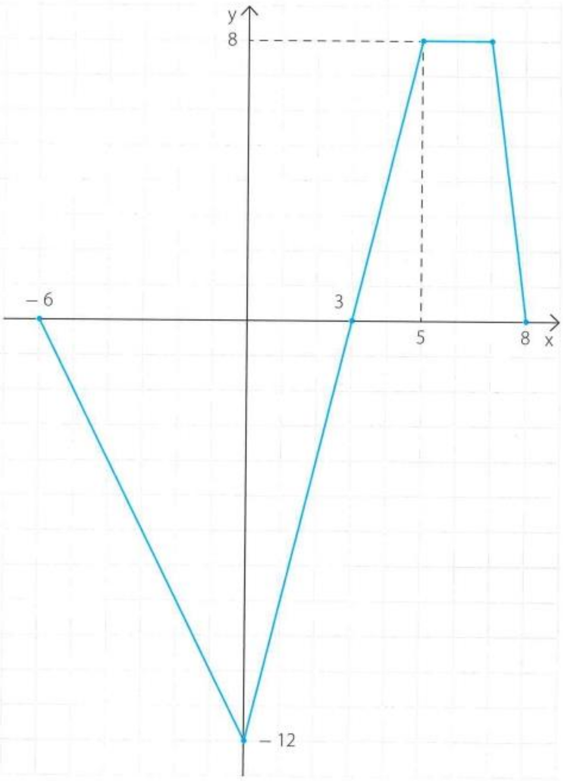
h) f(6) $\square$ f(7)

i) f(– 1) $\square$ f(– 2)

j) f(1) $\square$ f(5)

k) f(8) $\square$ f(– 6)

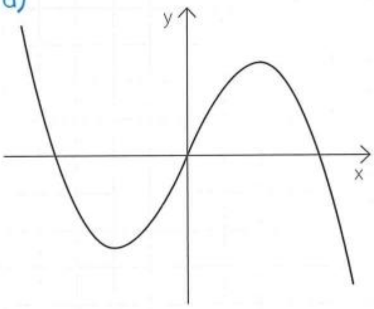
l) f(– 3) $\square$ f(1)



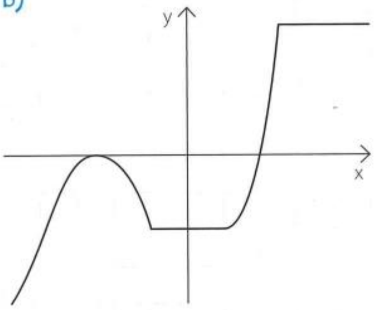
15 **Marcar sobre el eje x.**

- Con **rojo**: los intervalos de positividad.
- Con **verde**: los intervalos de negatividad.
- Con **azul**: el conjunto de ceros o raíces.

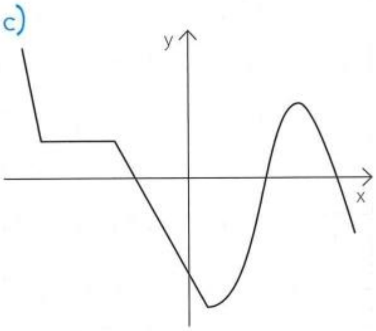
a)



b)



c)

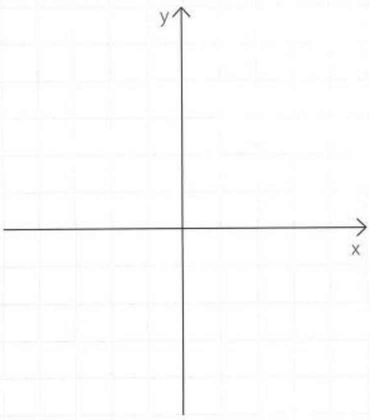


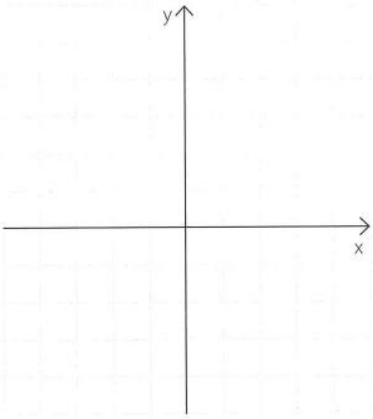
16 **Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.**

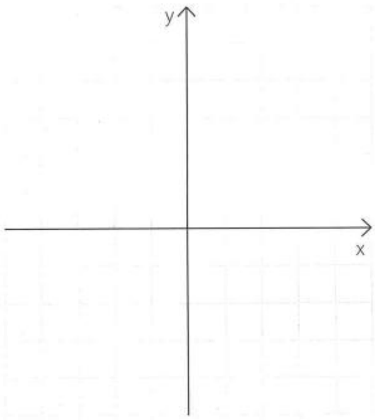
a) Es constante en $(-\infty\,;-1)$; decreciente en $(-1\,;3)$ y tiene un mínimo relativo en $(3\,;-4)$.

b) Es constante en $(-2\,;0)$ y es creciente en $(-\infty\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$.

c) Tiene máximos relativos en $(-4\,;1)$ y $(3\,;0)$ y $f(0)=-3$.







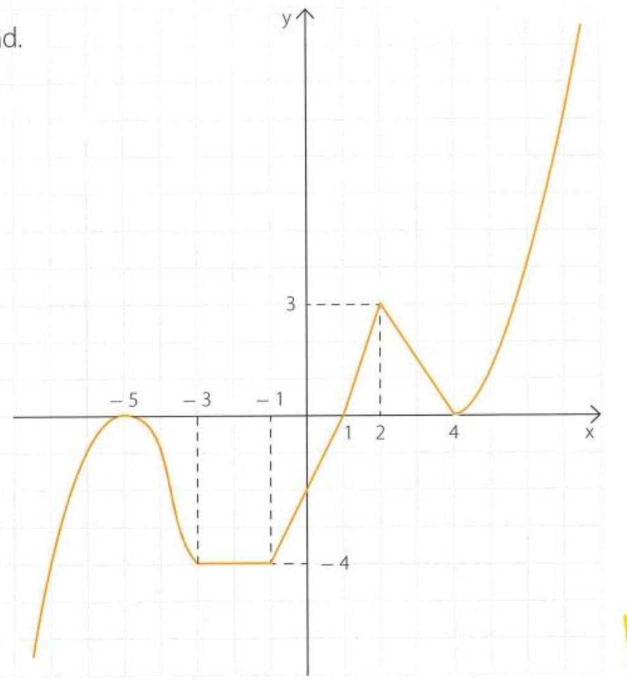
17 **Observar el gráfico y escribir.**

a) Los conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) El o los intervalos donde es constante.

d) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



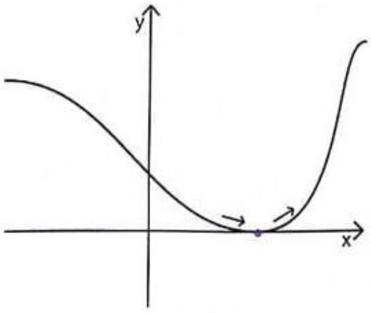
Unidad V: Función polinómica

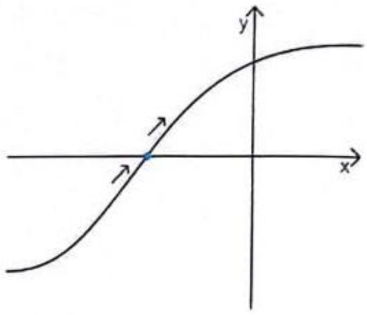
Teoría

Una función cuya fórmula es $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d$ es una función **polinómica** de grado n y tiene a lo sumo n raíces reales.

El **orden de multiplicidad** de una raíz es la cantidad de veces que esa raíz se repite como tal y determina si la función toca o atraviesa el eje x.

- Si el orden de multiplicidad es **par**, la función toca el eje x pero no lo atraviesa.
- Si el orden de multiplicidad es **impar**, la función atraviesa el eje x.



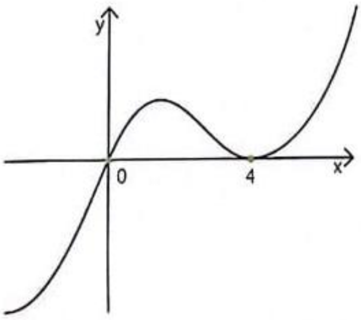


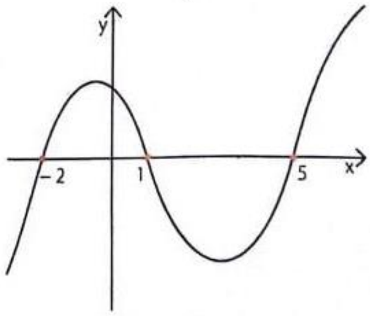
Para analizar el comportamiento de una función polinómica, se debe factorizar su fórmula y obtener todas sus raíces.

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + cx + d = a(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_2)(x - x_1)$$

a) $y = x(x-4)^2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ es de orden impar} \\ x_2 = 4 \text{ es de orden par} \end{cases}$

b) $y = (x+2)(x-1)(x-5) \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \text{ es de orden impar} \\ x_2 = 1 \text{ es de orden impar} \\ x_3 = 5 \text{ es de orden impar} \end{cases}$





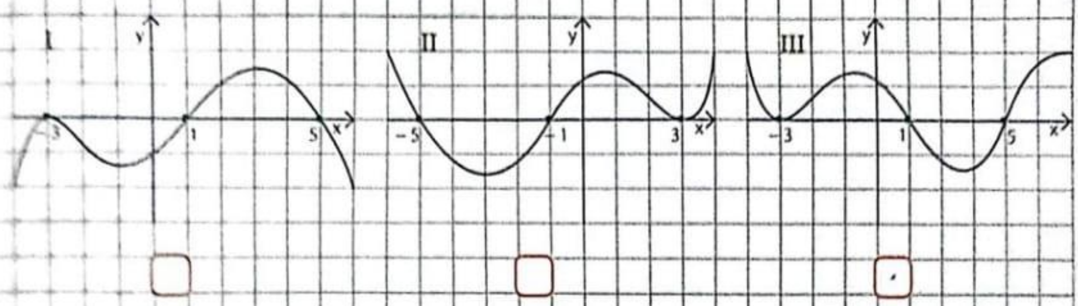
Ejercitación

39 Factorizar las siguientes funciones e indicar el orden de multiplicidad de cada raíz.

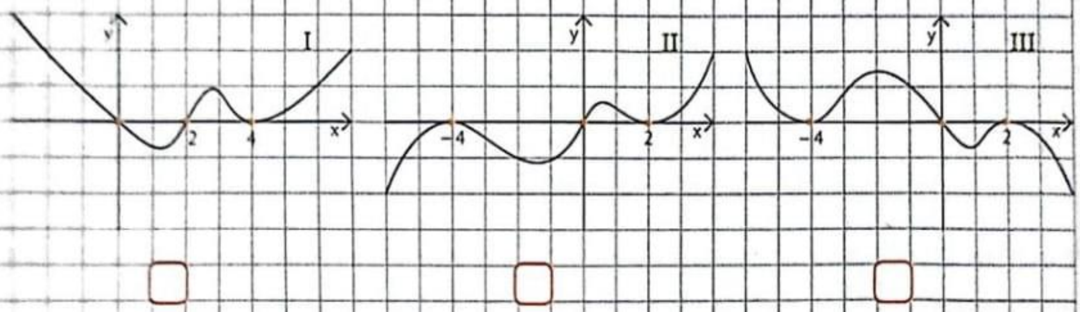
a) $y = x^3 - x^2 - 6x$ **b)** $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ **c)** $y = x^4 - 5x^2 + 4$

40 - Marcar la gráfica que representa la función polinómica

a) $y = (x-5)(x-1)(x+3)^2$

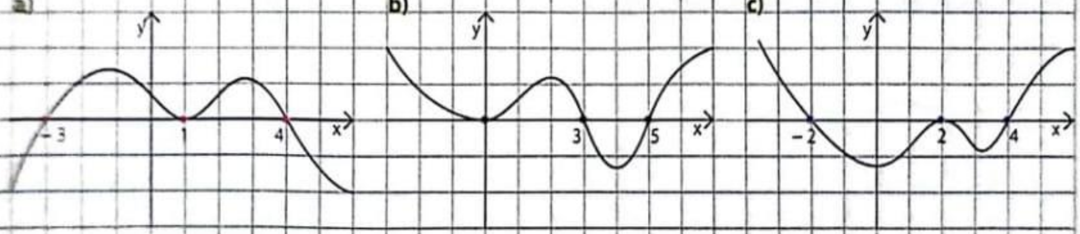


b) $y = x^3(x-2)^2(x+4)^2$



41 **Marcar con una X la función que corresponde a cada gráfico.**

a) **b)** **c)**



a)	
$y = (x-3)(x+1)^2(x+4)$	
$y = (x+3)(x-1)^2(x-4)$	
$y = -(x+3)(x-1)^2(x-4)$	

b)	
$y = x(x-3)(x-5)$	
$y = x^2(x-3)(x-5)$	
$y = -x^2(x-3)(x-5)$	

c)	
$y = -(x-2)^2(x+2)(x-4)$	
$y = (x-2)(x+2)^2(x-4)$	
$y = (x-2)^2(x+2)(x-4)$	

Para pensar y resolver

42 **Obtener la fórmula de cada una de las siguientes funciones.**

a) polinómica de grado 3
$x_1 = -2 \rightarrow$ Raíz doble
$x_2 = 3 \rightarrow$ Raíz simple
pasa por el punto $(0 ; 24)$

b) polinómica de grado 4
$x_1 = -3 \rightarrow$ Raíz simple
$x_2 = 1 \rightarrow$ Raíz doble
pasa por los puntos $(5 ; 0)$ y $(2 ; 15)$

Para trabajar en clase

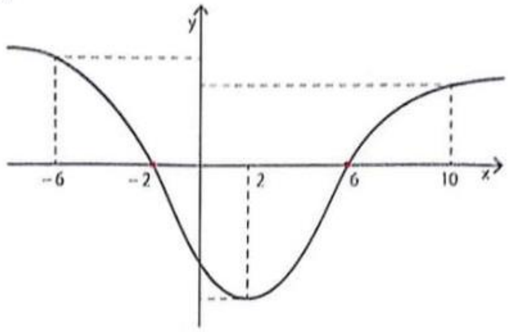
Teorema de Bolzano

Teoría

Si una función es continua en un intervalo de su dominio y tiene distinto signo en sus extremos, entonces la función tiene, al menos, una raíz en ese intervalo.

$$\begin{cases} f(-6) > 0 \\ f(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) = 0 \wedge -2 \in (-6\,;\,2)$$

$$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(10) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(6) = 0 \wedge 6 \in (2\,;\,10)$$



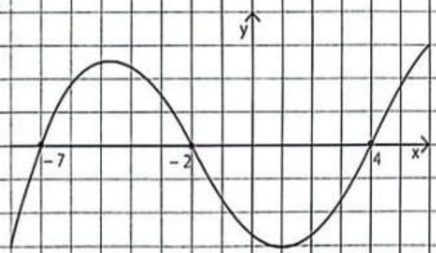
$C^+ = (-\infty\,;-2) \cup (6\,;+\infty)$ y $C^- = (-2\,;\,6)$

Las raíces de orden impar determinan los conjuntos de positividad y negatividad de una función polinómica.

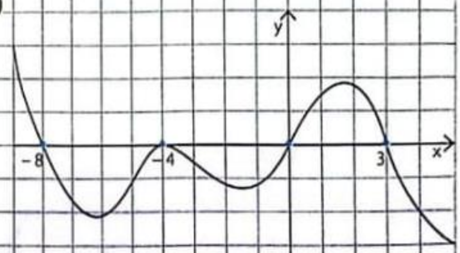
Ejercitación

43 Escribir los conjuntos de positividad y negatividad de las siguientes funciones.

a)



b)

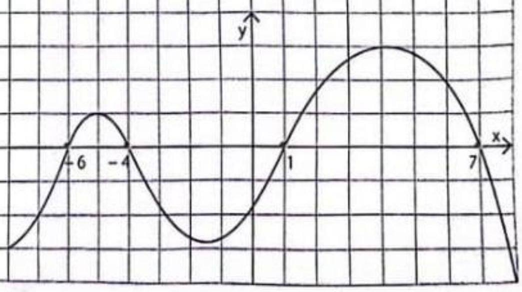


44 Colocar >, < o = según corresponda.

a) $f(-7) \square 0$ **d)** $f(-5) \square 0$ **g)** $f(10) \square 0$

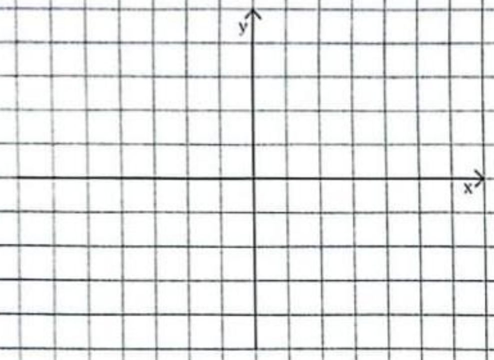
b) $f(0) \square 0$ **e)** $f(-4) \square 0$ **h)** $f(-8) \square 0$

c) $f(7) \square 0$ **f)** $f(-3) \square 0$ **i)** $f(1) \square 0$

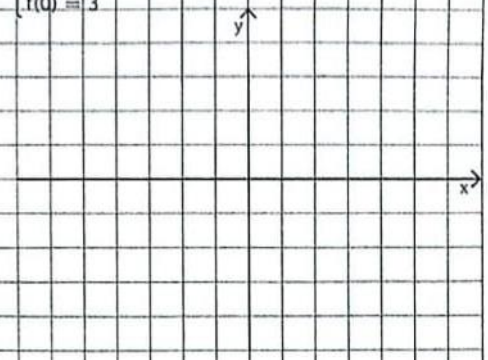


45 **Realizar el gráfico aproximado de cada función con la información dada.**

a) $\begin{cases} \text{Tres raíces simples} \\ C^- = (-\infty ; -3) \cup (1 ; 5) \\ C^+ = (-3 ; 1) \cup (5 ; +\infty) \end{cases}$

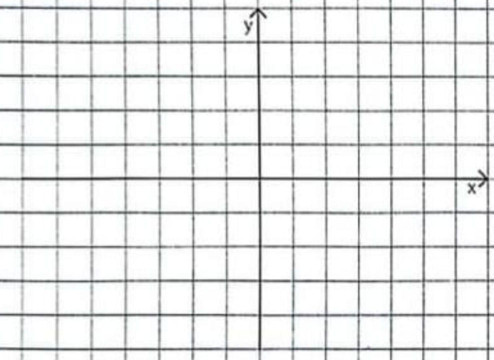


b) $\begin{cases} \text{Grado } 3 \\ x_1 = 2 \rightarrow \text{Raíz doble} \\ C^- = (5 ; +\infty) \\ f(0) = 3 \end{cases}$

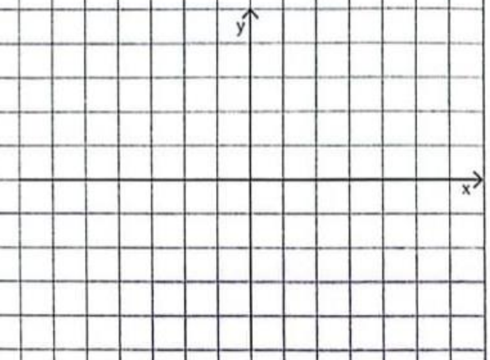


46 **Realizar el gráfico aproximado y hallar los conjuntos de positividad y negatividad de cada función.**

a) $y = x^3 - 2x^2 - 15x$



b) $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$



Para pensar y resolver

47 **Unir cada raíz con la o las funciones continuas a las que podría corresponder.**

a) $f(-2) = 0$

b) $f(0) = 0$

c) $f(2) = 0$

d) $f(5) = 0$

e) $f(-4) = 0$

$f(-1) = 2 \wedge f(3) = -4$

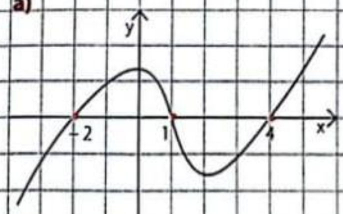
$f(1) = -1 \wedge f(6) = 5$

$f(-5) = 1 \wedge f(-1) = -3$

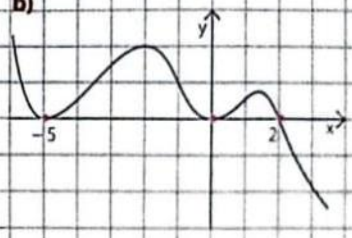
$f(3) = -6 \wedge f(7) = 1$

48 **Indicar el orden de multiplicidad de cada raíz y los conjuntos de positividad y negatividad.**

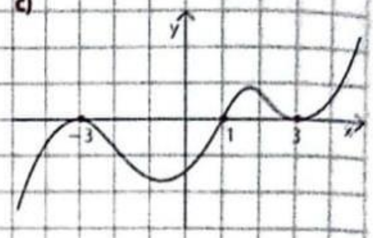
a)



b)

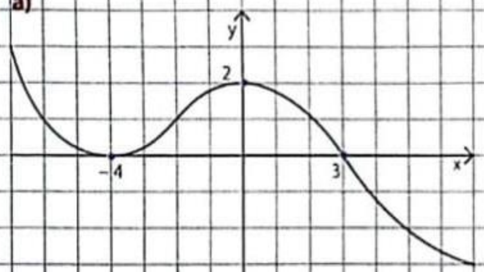


c)

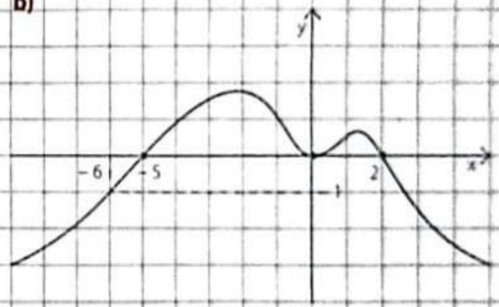


49 **Obtener la fórmula de cada una de las siguientes funciones.**

a)



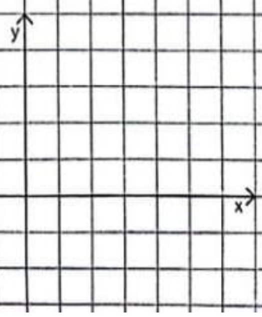
b)



50 **Realizar el gráfico aproximado de cada función con la información dada.**

a) Tres raíces simples

$C^+ = (-5\,;\,1) \cup (4\,;\,+\infty)$

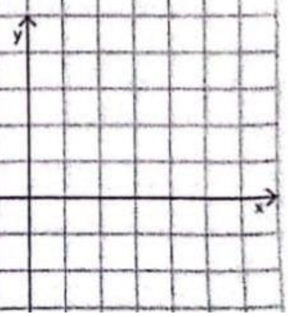


b) Grado 4

$x_1 = -3 \rightarrow$ Raíz doble

$x_1 = 4 \rightarrow$ Raíz doble

$f(0) < 0$



51 – Realizar el gráfico aproximado de las siguientes funciones polinómicas y determinar los conjuntos de positividad y negatividad, crecimiento y decrecimiento.

a) $y = x^3 - x^2 - 2x$ b) $y = x^4 - 10x^3 + 25x^2$ c) $y = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$