CUADERNILLO DE MATEMÁTICAS

DE 2DO AÑO

ESCUELA N° 46 NORMAL SUPERIOR Y SUPERIOR DE COMERCIO "DOMINGO GUZMÁN SILVA"

ACUERDO PEDAGÓGICO

Pautas de trabajo:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- A partir del 2do año, es necesario contar con calculadoras científicas como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en formato papel.

Para acreditar la materia:

- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

CONTENIDOS

Revisión: Ángulos. Clasificación. Ángulos opuestos por el vértice, complementarios, suplementarios, correspondientes. Ángulos determinados por dos paralelas y una transversal. (**Material: Cuadernillo de 1er año 2023)**

UNIDAD 1: Conjunto de números racionales. Lenguaje simbólico. Ecuaciones con números racionales.

UNIDAD 2: Razones y proporciones: Regla de tres simple. Porcentaje. Teorema de Thales

UNIDAD 3: Polígonos. Geometría: Triángulos. Cuadriláteros.

Material: Cuadernillo de 2do. 2024.

CICLO LECTIVO: 2024

UNIDAD 1 - CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES.

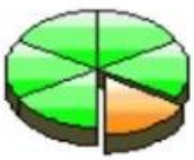
FRACCIONES

El concepto matemático de fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales. Una **fracción** es exactamente eso: una **división**.

Los términos de una fracción son el **numerador** y el **denominador**.

El **denominador** indica el número de partes iguales en que se divide la unidad.

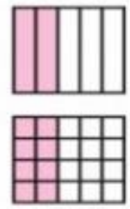
El **numerador** indica el número de partes que se toman de la unidad.



$1 \leftarrow$ **numerador**
$\overline{6} \leftarrow$ **denominador**

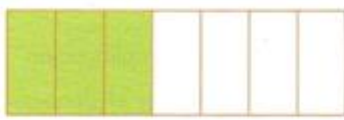
$\frac{2}{5} \longrightarrow$

$\frac{8}{20} \longrightarrow$



Las fracciones se clasifican en:

Fracción propia



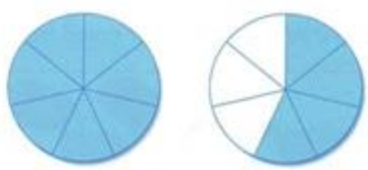
$\frac{3}{7}$

numerador: partes que se toman

denominador: partes en que se divide la unidad

Fracción impropia

Cuando el numerador es mayor que el denominador. Incluye una o varias unidades, más una fracción propia.



$$\frac{11}{7} = \frac{7}{7} + \frac{4}{7} = 1 + \frac{4}{7}$$

Aparentes: el numerador es múltiplo del denominador, las fracciones representan números enteros. $\frac{3}{3} = 1$ o $\frac{10}{5} = 2$. Si representan un entero, se las llama también fracciones UNITARIAS.

Una fracción impropia se puede expresar mediante un número mixto.

$\frac{7}{4} = 7:4 = 1\frac{3}{4}$ $\quad$ $7 \,|\underline{4}$; $3 \quad 1$ $\qquad$ $\frac{14}{3} = 14:3 = 4\frac{2}{3}$ $\quad$ $14 \,|\underline{3}$; $2 \quad 4$

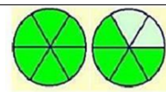
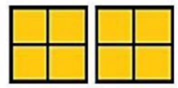
$$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

TIPOS DE FRACCIONES

FRACCIÓN MIXTA	O número mixto tiene un entero y una fracción propia	$5\frac{2}{8}$
FRACCIÓN DECIMAL	Su denominador es 10 o potencia de 10. 10,100, 1000 ...	$\frac{6}{10}$
FRACCIÓN EQUIVALENTE	Representan la misma cantidad pero en unidades diferentes	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Actividades:

1. Completar el siguiente cuadro.

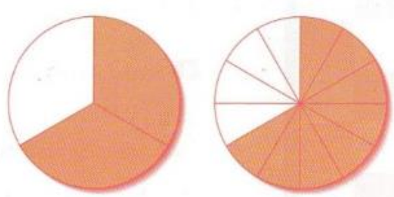
FRACCIÓN	CLASIFICACIÓN	GRÁFICO
$\frac{3}{7}$		
		
$\frac{10}{2}$		
		
$\frac{7}{5}$		

2. Coloca cada fracción con su respectivo número mixto

$\frac{19}{2}$		3 5/6
$\frac{35}{4}$		2 3/5
$\frac{13}{5}$		8 3/4
$\frac{23}{6}$		9 1/2

Fracciones equivalentes

Dos *fracciones* son *equivalentes* cuando representan la misma cantidad.



$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Criterio de equivalencia:

Los productos cruzados son iguales:

$$2 \cdot 12 = 3 \cdot 8$$

Cuando los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por un mismo número, se obtiene otra fracción equivalente:

$$\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{18}{24} \qquad \frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4}$$

fracción **irreducible**: no se puede simplificar más

Cuando los dos términos de una fracción se multiplican o dividen por un mismo número, se obtiene otra fracción equivalente:

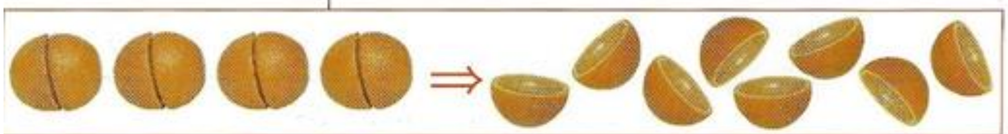
$$\frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{18}{24} \qquad \underbrace{\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}}_{\text{simplificación}}$$

fracción **irreducible**: no se puede simplificar más

Si el numerador es divisible por el denominador, la fracción expresa una cantidad entera:

$$\frac{6}{2} = 3$$

Y todo entero se puede escribir como fracción:



$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$$

El signo en las fracciones:

$$\frac{-4}{5} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \qquad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

Actividades:

1) Escribir como una fracción impropia y como número mixto.

a) 40 días como parte de una semana:

b) 500 segundos como parte de un minuto:

c) 100 horas como parte de un día:

d) 70 meses como parte de un año:

2. Obtener fracciones equivalentes a las dadas, ya sea amplificando o simplificando.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{15}{6}$ d) $\frac{8}{3}$

Operaciones con fracciones

Suma y resta

Con el mismo denominador. Se conserva el denominador y se suman y restan los numeradores:

$$\frac{17}{6} + \frac{5}{6} - \frac{7}{6} = \frac{17+5-7}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Se simplifica el resultado

¡INTENTA TÚ!

a) $\frac{6}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\square}{\square}$ b) $-\frac{7}{3}+\frac{3}{3}=\frac{\square}{\square}$ c) $\frac{5}{7}+\frac{4}{7}=\frac{\square}{\square}$

d) $\frac{8}{13}+\frac{1}{13}+\frac{2}{13}=\frac{\square}{\square}$ e) $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{\square}{\square}$ f) $\frac{10}{7}-\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{\square}{\square}$

SUMAS Y RESTAS CON DISTINTOS DENOMINADORES

Con distinto denominador. Se reducen primero a común denominador:

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{10}=\frac{25}{30}+\frac{9}{30}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15} \qquad \boxed{\text{m.c.m. }(6, 10)=30}$$

$$\frac{7}{3}-2+\frac{1}{2}=\frac{14-12+3}{6}=\frac{5}{6} \qquad \boxed{\text{m.c.m. }(3, 1, 2)=6}$$

¿Practicamos?

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{\square+\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

2. $\frac{4}{5}+\frac{1}{3}=\frac{\square+\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

3. $\frac{3}{5}+\frac{1}{4}=\frac{\square+\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

4. $\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{\square+\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

5. $\frac{7}{14}+\frac{4}{7}=\frac{\square+\square}{\square}=\frac{\square}{\square}$

Multiplicación

Se multiplican por separado los numeradores y los denominadores:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8} \qquad 7\cdot\frac{2}{5}=\frac{7}{1}\cdot\frac{2}{5}=\frac{14}{5}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}$$

Es más rápido simplificar mentalmente antes de multiplicar:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{\cancel{3}}{2\cdot 2}\cdot\frac{5}{2\cdot\cancel{3}}=\frac{5}{8}$$

¡A resolver! No te olvides de SIMPLIFICAR!!!!

a) $\frac{12}{40}\times\frac{8}{14}=$ b) $\frac{27}{45}\times\frac{6}{13}=$ c) $\frac{89}{93}\times\frac{5}{20}=$ d) $\frac{9}{18}\times\frac{20}{40}=$

Inversión

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son mutuamente inversas.

El producto de una fracción por su inversa es la unidad: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

La fracción $\frac{0}{1}$ no tiene inversa.

División

Para dividir una fracción por otra, se multiplica la primera por la inversa de la segunda

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{7} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{12} \qquad 2 : \frac{5}{6} = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

Practiquemos entre todos algunas multiplicaciones y divisiones:

	Opera y simplifica . . .	
[1]	$\frac{14}{49} : \frac{2}{3} =$	
[2]	$28 \cdot \frac{6}{189} =$	

[3]	$\frac{1}{3} : \frac{7}{35} =$	
[4]	$\frac{1}{11} \cdot \frac{5}{5} =$	
[5]	$\frac{15}{8} \cdot \frac{3}{5} =$	

OPERACIONES COMBINADAS

Al realizar **operaciones combinadas con fracciones**, el orden que se sigue es el mismo que en las operaciones con números naturales.

1.º Las operaciones que hay entre paréntesis.

2.º Las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.

3.º Las sumas y las restas, de izquierda a derecha.

EJEMPLO

Calcula. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} : \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\right) =$

Paréntesis

$= \frac{3}{5} + \frac{6}{5} : \left(\frac{5}{10} + \frac{8}{10}\right) = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} : \frac{13}{10} =$

Multiplicaciones y divisiones

$= \frac{3}{5} + \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 13} = \frac{3}{5} + \frac{60}{65} =$

Sumas y restas

$= \frac{39}{65} + \frac{60}{65} = \frac{99}{65}$

Actividades

1) **Calcula, indicando los pasos que sigues.**

a) $\frac{7}{3} : \frac{1}{2} + \frac{5}{4}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} - \frac{1}{3}$

2) **Opera.**

a) $\left(\frac{14}{5} - \frac{3}{7}\right) \cdot \frac{5}{12} + \frac{11}{3}$

b) $\frac{9}{7} - \left(\frac{17}{8} + \frac{3}{5}\right) : \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9}$

Los números racionales (Q)

Teoría

Un número es **racional** cuando puede ser expresado como un cociente entre dos números enteros.
Todo número racional puede escribirse mediante una **fracción** o una **expresión decimal**.
La **expresión decimal** de un número racional tiene una cantidad **finita** o una cantidad **infinita periódica** de cifras decimales.

a) $\frac{2}{5} = 0{,}4$ **b)** $-\frac{1}{8} = -0{,}125$ **c)** $\frac{2}{9} = 0{,}222... = 0{,}\widehat{2}$ **d)** $-\frac{1}{6} = -0{,}1666... = -0{,}1\widehat{6}$

Los ejemplos **a)** y **b)** son expresiones **finitas**; el ejemplo **c)**, periódica **pura**; y el **d)**, periódica **mixta**.

1 **Unir cada fracción con su expresión decimal.**

a) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{6}{11}$

b) $\frac{4}{3}$ f) $\frac{17}{3}$

c) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{7}{25}$

d) $\frac{1}{12}$

$0{,}28$ $0{,}\widehat{54}$ $1{,}\widehat{3}$ $0{,}8\widehat{3}$ $0{,}\widehat{5}$ $0{,}4$ $5{,}\widehat{6}$ $0{,}08\widehat{3}$

2 **Colocar >, < o = según corresponda en cada caso.**

a) $\frac{2}{3} \square 0{,}67$ c) $\frac{2}{11} \square 0{,}\widehat{18}$ e) $-\frac{3}{7} \square -0{,}42\widehat{8}$ g) $-\frac{37}{30} \square -1{,}2\widehat{3}$

b) $0{,}\widehat{25} \square \frac{1}{4}$ d) $0{,}23 \square \frac{3}{13}$ f) $-0{,}7\widehat{5} \square -\frac{3}{4}$ h) $-0{,}5\widehat{4} \square -\frac{6}{11}$

3 Colocar una F si la expresión decimal de la fracción es finita y una P, si es periódica.

a) $\frac{2}{7}$ ☐ b) $\frac{7}{20}$ ☐ c) $\frac{4}{15}$ ☐ d) $\frac{9}{8}$ ☐ e) $\frac{5}{12}$ ☐ f) $\frac{1}{32}$ ☐

4 Transformar en fracción irreducible las siguientes expresiones decimales finitas.

a) $0{,}85 =$ c) $2{,}25 =$ e) $12{,}8 =$

b) $-1{,}6 =$ d) $-3{,}75 =$ f) $-3{,}125 =$

5 Colocar una expresión decimal que cumpla con la condición pedida en cada caso.

a) $0{,}15 < \boxed{} < 0{,}151$ c) $\frac{2}{9} < \boxed{} < 0{,}223$ e) $\frac{1}{4} < \boxed{} < 0{,}\widehat{25}$

b) $-1{,}\widehat{5} < \boxed{} < -1{,}5$ d) $-2{,}5\widehat{6} < \boxed{} < -\frac{23}{9}$ f) $-3{,}5\widehat{9} < \boxed{} < -3{,}59$

PARA PRACTICAR

Transformen en fracción irreducible las siguientes expresiones decimales finitas.

a) $0{,}55 =$ ______ $=$ ☐ e) $0{,}225 =$ ______ $=$ ☐

b) $-0{,}32 =$ ______ $=$ ☐ f) $-4{,}25 =$ ______ $=$ ☐

c) $1{,}4 =$ ______ $=$ ☐ g) $25{,}8 =$ ______ $=$ ☐

d) $-10{,}6 =$ ______ $=$ ☐ h) $5{,}75 =$ ______ $=$ ☐

Expresiones decimales periódicas

Teoría

Para realizar cálculos donde aparezca alguna expresión decimal periódica, es necesario transformarla previamente en una fracción irreducible y luego operar.

Ejemplos de cómo transformar expresiones decimales periódicas en fracciones:

I) Periódicas puras

a) $0{,}\widehat{5} = \frac{5}{9}$ b) $1{,}\widehat{2} = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9}$ c) $0{,}\widehat{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ d) $2{,}\widehat{45} = \frac{245-2}{99} = \frac{243}{99} = \frac{27}{11}$

II) Periódicas mixtas

a) $0{,}1\widehat{3} = \frac{13-1}{90} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$ b) $1{,}1\widehat{6} = \frac{116-11}{90} = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$ c) $0{,}14\widehat{6} = \frac{146-14}{900} = \frac{132}{900} = \frac{11}{75}$

6 Expresar como expresión decimal periódica y transformarla en una fracción irreducible.

a) 0,444… =

e) 3,333… =

b) 0,121212… =

f) 0,0888… =

c) 0,027027027… =

g) 0,34666… =

d) 1,777… =

h) 1,8333…=

7) Completar:

a) $1,\overline{3} = \dfrac{13-1}{\dots\dots\dots} = \dfrac{12}{\dots\dots}$

b) $3,\overline{23} = \dfrac{323-\dots}{99} = \dfrac{\dots\dots}{99}$

c) $15,\overline{5} = \dfrac{155-\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

d) $15,\overline{515} = \dfrac{\dots\dots\;-15}{\dots\dots\dots\dots} = \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}$

e) $0{,}0\overline{2} = \dfrac{2}{90}$

f) $0{,}1\overline{2} = \dfrac{12-}{\quad} = \text{-----}$

g) $0{,}2\overline{51} = \dfrac{-2}{99} = \text{——}$

h) $0{,}10\overline{2} = \dfrac{102-}{00} = \text{——}$

i) $1{,}2\overline{3} = \dfrac{-12}{9} = \text{——}$

j) $2{,}13\overline{4} = \dfrac{-}{\quad} = \text{——}$

Para seguir practicando:

Convierte en fracciones irreducibles

a) 0.591 =

b) 0.305 =

c) $0.\overline{703}$ =

g) 0.3 =

h) 0.8 =

i) 0.5 =

d) $0.79\overline{3}$ =

e) $0.3\overline{4}$ =

f) $0.4\overline{86}$ =

j) $0.\overline{7}$ =

k) $0.\overline{68}$ =

l) $0.1\overline{35}$ =

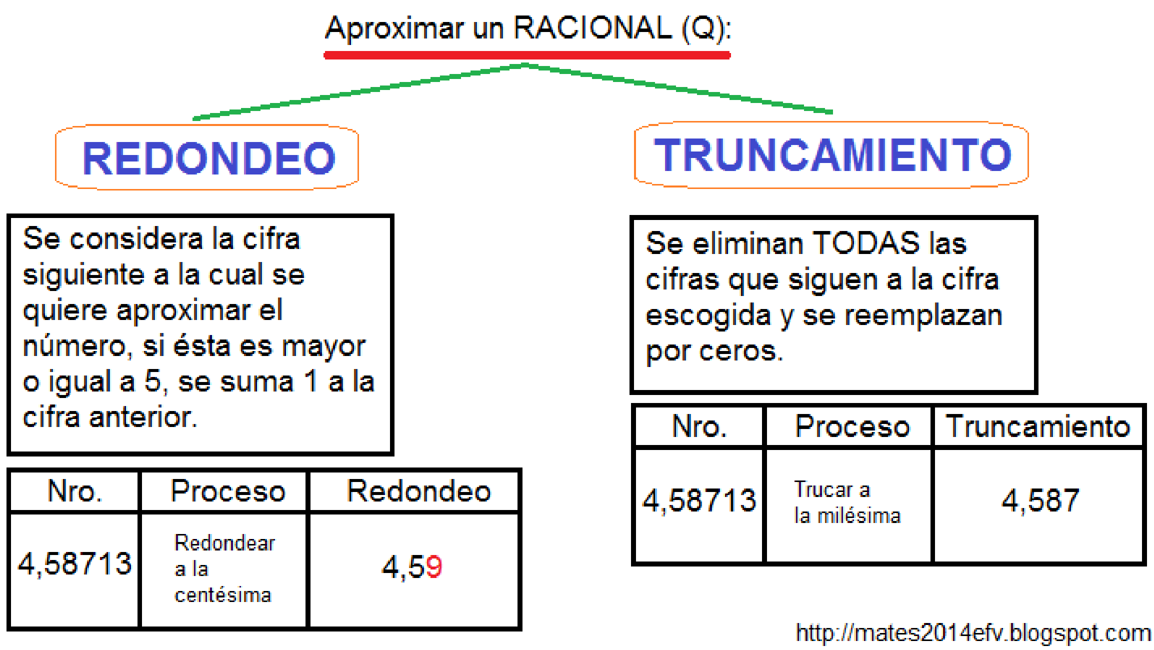
APROXIMACIÓN

Cuando un número tiene muchas cifras decimales, a veces es necesario APROXIMAR el número según su utilización. Por ejemplo, cuando compramos algo que cuesta$ 123,99; sabemos que terminaremos pagando $124 ya que no existe una moneda o billete de $0,01. En este caso se aproximó por redondeo.

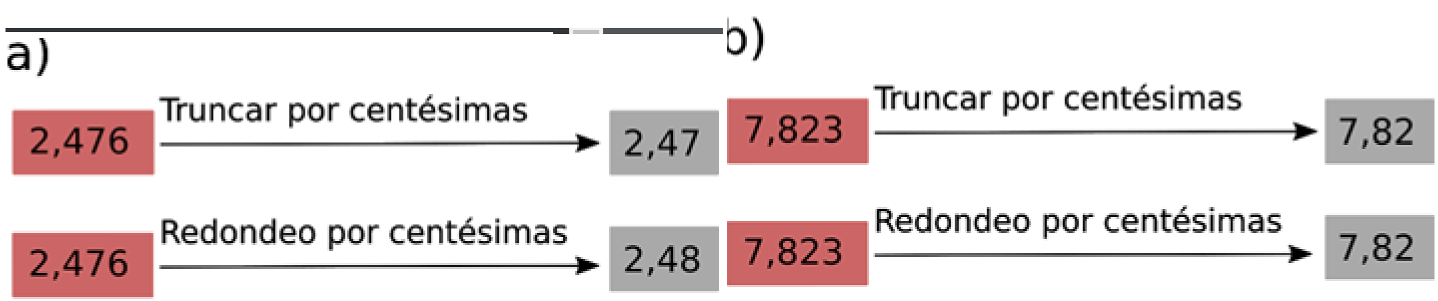
Si queremos aproximar un número al

- **DÉCIMO: Será un lugar detrás de la coma – ejemplo: 1,4**
- **CENTÉSIMO: Serán dos lugares detrás de la coma – ejemplo: -2,45**
- **MILÉSIMO: Serán tres lugares detrás de la coma – ejemplo: -12,437**

A continuación te explicamos cómo se debe "redondear" un número y como se trunca.



EJEMPLOS:



Actividades: Aproximar por redondeo y truncamiento los siguientes números.

REDONDEO	24,564839	TRUNCAMIENTO
	DÉCIMO	
	CENTÉSIMO	
	MILÉSIMO	

REDONDEO	3,45672348	TRUNCAMIENTO
	DÉCIMO	
	CENTÉSIMO	
	MILÉSIMO	

10 **Aproximar los siguientes números racionales.**

a) A los décimos ($\varepsilon < 0{,}1$) $\rightarrow 2{,}7623 \cong$

b) A los centésimos ($\varepsilon < 0{,}01$) $\rightarrow 8{,}2319 \cong$

c) A los milésimos ($\varepsilon < 0{,}001$) $\rightarrow 6{,}48972 \cong$

d) A los décimos ($\varepsilon < 0{,}1$) $\rightarrow \frac{2}{11} \cong$

e) A los milésimos ($\varepsilon < 0{,}001$) $\rightarrow \frac{6}{13} \cong$

f) A los centésimos ($\varepsilon < 0{,}01$) $\rightarrow \frac{5}{7} \cong$

12 **Aproximar (A) y truncar (T) cada una de los siguientes expresiones decimales con $\varepsilon < 0{,}01$.**

a) 1,5732 A $\cong$ T $\cong$ b) 0,0871 A $\cong$ T $\cong$ c) 2,4106 A $\cong$ T $\cong$ d) 3,1594 A $\cong$ T $\cong$

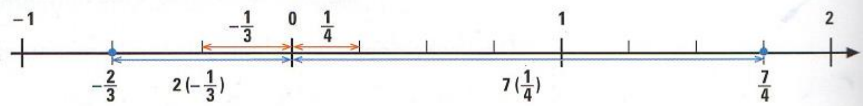
REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

Las fracciones equivalentes designan el mismo número racional. Por el contrario, la representación decimal es única.

Representación gráfica

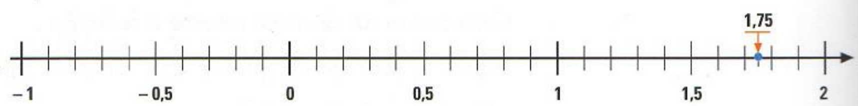
Como *fracción*. Se divide el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador.

Representamos los números $-2/3$ y $7/4$



Representamos $\frac{7}{4} = 1{,}75$

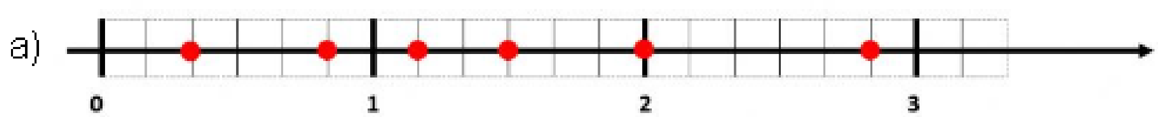
Como *número decimal*. En una recta graduada decimalmente:



Dados dos números racionales, el mayor se representa siempre a la derecha del menor.

VEAMOS SI ENTENDIMOS…

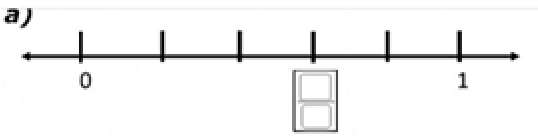
1) Escribir los números racionales que se encuentran representados en la recta numérica. Expresarlos en forma fraccionaria y decimal.



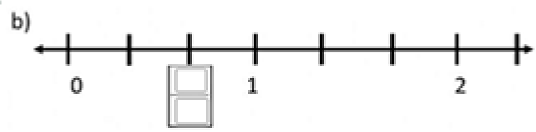
a)------------- b)----------- c)----------- d)------------- e)----------- f)------------

2) Escribe en forma fraccionaria y decimal los siguientes números representados en las rectas numéricas.

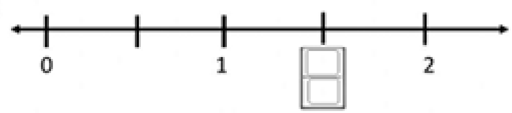
a)



b)



c)



3) Pasar a fracción y resolver

a) $0,3.(-0,8) =$ ______________________

d) $-1,5 + 0,7 =$ ______________________

b) $-1,4 + \frac{3}{2} =$ ______________________

e) $0,\overline{6} + 1,1 =$ ______________________

c) $0,08:(-2) =$ ______________________

f) $-0,\overline{5}.(-1,2) =$ ______________________

13 Expresar en fracción y resolver los siguientes ejercicios combinados.

a) $(0,2 . 7 + 0,\overline{6}) : 5 - 1,\overline{2} =$

b) $1:3 + \left(0,\overline{4} - 1,\overline{1}\right) : \frac{1}{2} =$

c) $\frac{2}{9} : 0,\overline{4} + 0,25 - 1 : 0,8 =$

f) $0,8 . 3 + \left(0,2 - 0,5 . 0,6\right) : 0,2 =$

g) $\left(\frac{8}{5} - 1\right) . \frac{5}{27} + \left(0,\overline{5} - 1,\overline{3}\right) : 7 =$

h) $\left(0,6 - 0,04\right) : 0,7 - \frac{6}{5} : 2 -$

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Dados los números enteros a y b (b≠0) y n un número racional:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad b \neq 0$$

exponente

potencia

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

base

- Si la base es positiva la potencia es positiva

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{(-2)^2}{5^2}=\frac{4}{25}$$

- Si la base es negativa y exponente par la potencia es positiva

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{(-2)^3}{3^3}=\frac{-8}{27}$$

- Si la base es negativa y exponente impar la potencia es negativa

Analiza las siguientes situaciones:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^0=1$$

- Todo número elevado a la 0 es igual a 1

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^1=-\frac{3}{2}$$

- Todo número elevado al exponente 1 es igual al mismo número

$$0,8^2=\left(\frac{8}{10}\right)^2=\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

Otra forma de resolver →

$$0{,}8 \cdot 0{,}8=0{,}64=\frac{64}{100}=\frac{16}{25}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125} \quad \neq \quad \frac{3^3}{5}=\frac{27}{5}$$

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2=$ 2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3=$ 3) $0,5^5=$ 4) $1,\hat{3}^2=$

Potencias de exponente negativo

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$(-2)^{-6}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n} \quad a\neq 0 \text{ y } b\neq 0}$$

se transforma en positivo

Se invierte la base

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=$ 2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ 3) $0,5^{-1}=$ 4) $(-10)^{-4}=$

RAÍCES DE NÚMEROS RACIONALES (Q)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$$

índice

raíz

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

radicando

- Si el radicando es positivo la raíz es positiva

$$\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{1000}} = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

- Si el radicando es negativo y índice impar la raíz es negativa

¡ I M P O R T A N T E !

$\sqrt{-4} =$

- Si el radicando es negativo y el índice par no tiene solución en el conjunto que estamos trabajando

Resuelve los siguientes ejercicios:

1) $\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} =$ 2) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} =$ 3) $\sqrt{-\frac{9}{4}} =$ 4) $\sqrt{\frac{4}{25}} =$

Seguimos practicando:

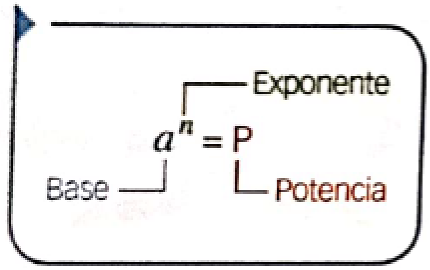
1) Calcula las siguientes potencias.

a) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 =$	b) $(-0{,}3)^{-2} =$	c) $\left(-\frac{8}{5}\right)^{-3} =$
d) $\left(-\frac{6}{5}\right)^2 =$	e) $-7^{-2} =$	f) $(-0{,}\hat{2})^{-3} =$
g) $\left(-\frac{7}{9}\right)^3 =$	h) $(-3{,}5)^3 =$	i) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

2) Calcula, **SI ES POSIBLE**, las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} =$	b) $\sqrt[4]{-\frac{1}{81}} =$	c) $\sqrt[3]{-1{,}728} =$
d) $\sqrt{-\frac{49}{64}} =$	e) $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}} =$	f) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}} =$
g) $\sqrt[3]{-\frac{1}{216}} =$	h) $\sqrt{1{,}44} =$	i) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$

POTECIACIÓN DE NÚMEROS REALES



Dados $a \in \mathbb{R}$ y n entero positivo, la potenciación en $\mathbb{R}$ se define como $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}$.

Además, si $a \neq 0$ y n es un entero no negativo, entonces se definen: $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propiedades	Expresión simbólica	Ejemplos
Producto de potencias de igual base	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4)^{3+2} = (-4)^5$
Cociente de potencias de igual base	$a^n \div a^m = a^{n-m};\ a \neq 0$	$(-3)^7 \div (-3)^3 = (-3)^{7-3} = (-3)^4$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$[(-0{,}2)^3]^2 = (-0{,}2)^{3 \cdot 2} = (-0{,}2)^6$
Potencia de un producto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$[(-5) \cdot 3]^3 = (-5)^3 \cdot 3^3 =$ $= -125 \cdot 27 = -3375$
Potencia de un cociente	$(a \div b)^n = a^n \div b^n;\ b \neq 0$	$(7 \div 10)^3 = 7^3 \div 10^3 =$ $= 343 \div 1000 = 0{,}343$

La única forma de que una potencia sea negativa es que lo sea la base y el exponente sea impar.

EJEMPLO:

Calcula el valor de $\frac{15^6 \cdot 12^4 \cdot 5^5 \cdot 6^5}{10^{11} \cdot 3^{13}}$.

- Factorizamos las bases y aplicamos la potencia a cada producto:

$$\frac{(3 \cdot 5)^6 \cdot (2^2 \cdot 3)^4 \cdot 5^5 \cdot (2 \cdot 3)^5}{(2 \cdot 5)^{11} \cdot 3^{13}} = \frac{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5}{2^{11} \cdot 5^{11} \cdot 3^{13}}$$

- Aplicamos el producto y cociente de potencias de igual base:

$$\frac{2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{11}}{2^{11} \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

RADICACIÓN DE NÚMEROS REALES

Índice

$\sqrt[n]{P} = a$

Radicando — Raíz

Dados $P \in \mathbb{R}$ y n entero positivo, llamamos raíz enésima de P ($\sqrt[n]{P}$) a un número real a definido así:

Si n es par y $P \geq 0$, $\sqrt[n]{P} = a$ si y solo si $a^n = P$.

Si n es impar, $\sqrt[n]{P} = a$ si y solo si $a^n = P$.

Las siguientes propiedades se cumplen siempre que existan $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$.

Propiedades	Expresión simbólica	Ejemplos
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{(-27) \cdot 125} = \sqrt[3]{(-27)} \cdot \sqrt[3]{125} =$ $= -3 \cdot 5 = -15$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{16 \div 0{,}04} = \sqrt{16} \div \sqrt{0{,}04} =$ $= 4 \div 0{,}2 = 20$
Raíz de una potencia	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[4]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{4}} = 5^3 = 125$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{64}{729}}} = \sqrt[6]{\frac{64}{729}} = \frac{2}{3}$

Potencia de exponente fraccionario

Se define así:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Ejemplo: $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

No es posible encontrar un resultado real para las raíces de índice par de números negativos.

Por ejemplo, $\sqrt{(-25)}$ no es un número real.

Resuelvan aplicando propiedades. Expresen el resultado con exponentes positivos.

a) $(-2)^3 : (-2)^7 =$

b) $3^4 . (3^2)^3 : 3^{-12} =$

c) $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} . \sqrt[3]{\frac{1}{4}} =$

d) $\sqrt{0,\hat{4}} =$

e) $a^{40} . a^{50} : (a^{30})^{-3} =$

f) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4} . \left(-\frac{1}{5}\right)^{5} =$

g) $\sqrt{\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}} =$

h) $(-0,2)^3 : (-0,2)^7 =$

i) $(0,\hat{1})^2 . \left(0,\hat{1}^3\right)^{-3} : (0,\hat{1})^{-7} =$

j) $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} : \sqrt[3]{\frac{25}{9}} =$

k) $\sqrt{\frac{1}{2}} . \sqrt{\frac{1}{2}} =$

l) $a^3 . a^5 : (a^{-2})^3 =$

m) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-4} . \left(-\frac{1}{5}\right)^{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) =$

n) $\sqrt{2,\hat{7}} =$

EJERCICIOS COMBINADOS.

Separar en términos, expresar como fracción y resolver.

a) $\sqrt{0,64:4} - 0,3 . \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$

b) $0,5 . \sqrt{0,81} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

c) $\left(3 - \frac{1}{2}\right)^{-2} - 0,02 : \frac{1}{10} + \sqrt[3]{\frac{7}{8} - 1} =$

d) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-2} + 0,\hat{3}^2 - \sqrt{1 - 0,8} =$

e) $\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{1 : \frac{36}{25}} =$

f) $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-3} + \sqrt[3]{\frac{1}{4} : (-2)} =$

Porcentaje

Teoría

El A% de una cantidad B, es tomar A de las 100 partes en que se divide a B, o sea: $A \cdot \frac{B}{100} = B \cdot \frac{A}{100}$

Por ejemplo, el 15% de 180 es: $180 . \frac{15}{100} = 180 . 0,15 = 27$

Para calcular el porcentaje de una cantidad, se multiplica a esta por un número decimal.

a) El 5% de 60 es: 60 . 0,05 = 3

b) El 30% de 120 es: 120 . 0,3 = 36

c) El 75% de 300 es: 300 . 0,75 = 225

d) El 120% de 150 es: 150 . 1,2 = 180

23 Expresar como producto y calcular.

a) El 8% de 250:

b) El 15% de 160:

c) El 35% de 280:

d) El 48% de 350:

e) El 72% de 600:

f) El 108% de 750:

24 **Unir cada porcentaje con su resultado.**

a) El 12% de $ 450.

e) El 25% de $ 184.

b) El 32% de $ 150.

f) El 45% de $ 140.

c) El 68% de $ 75.

g) El 75% de $ 76.

d) El 84% de $ 50.

h) El 130% de $ 40.

$ 42 · $ 52 · $ 46 · $ 54 · $ 63 · $ 56 · $ 48 · $ 51 · $ 57

25 El precio de lista de un LCD es de $ 7 200. Si se paga en efectivo, tiene un descuento del 12%.

Calcular y responder.

a) ¿Cuánto dinero representa el descuento?

b) ¿Cuál es el precio en efectivo?

Si se paga en cuotas iguales, con tarjeta de crédito, tiene un recargo según la cantidad de cuotas.

c) **Calcular y completar la tabla.**

Cantidad de cuotas	Porcentaje del recargo	Valor del recargo	Precio con recargo	Valor de cada cuota
2	3%			
3	5%			
6	11%			
9	17%			
12	26%			

Notación científica

Teoría

La **notación científica** es una forma de escribir números muy grandes o muy pequeños. Se utiliza para poder expresarlos de una manera abreviada y para operar con mayor facilidad.

Un número está escrito en notación científica cuando se lo expresa como: $\mathbf{a \,.\, 10^n \wedge 1 \leq a < 10 \wedge n \in Z}$.

a) $5\,000 = 5 \,.\, 1\,000 = 5 \,.\, 10^3$

b) $0{,}02 = \frac{2}{100} = 2 \,.\, \frac{1}{100} = 2 \,.\, 10^{-2}$

c) $270\,000 = 2{,}7 \,.\, 100\,000 = 2{,}7 \,.\, 10^5$

d) $0{,}0000018 = \frac{18}{10\,000\,000} = 1{,}8 \,.\, \frac{1}{1\,000\,000} = 1{,}8 \,.\, 10^{-6}$

e) $453\,000\,000 = 4{,}53 \,.\, 100\,000\,000 = 4{,}53 \,.\, 10^8$

f) $0{,}00000000728 = \frac{728}{100\,000\,000\,000} = 7{,}28 \,.\, \frac{1}{1000\,000\,000} = 7{,}28 \,.\, 10^{-9}$

Potencias de 10

$10 = 10^1$

$100 = 10^2$

$1\,000 = 10^3$

$\frac{1}{10} = 10^{-1}$

$\frac{1}{100} = 10^{-2}$

$\frac{1}{1\,000} = 10^{-3}$

68 **Unir cada número con su notación científica.**

a) 8 000

b) 0,08

c) 800 000

d) 0,0008

e) 80 000 000

f) 0,0000008

g) 8 000 000 000

h) 0,0000000008

$8 \,.\, 10^{-7}$ $8 \,.\, 10^{7}$ $8 \,.\, 10^{6}$

$8 \,.\, 10^{-10}$ $8 \,.\, 10^{5}$

$8 \,.\, 10^{-4}$ $8 \,.\, 10^{-6}$ $8 \,.\, 10^{-2}$

$8 \,.\, 10^{3}$ $8 \,.\, 10^{9}$

9 **Marcar con una X la notación científica de cada uno de los siguientes números.**

a) 14 000 → $14 \,.\, 10^{3}$ ☐ $1{,}4 \,.\, 10^{4}$ ☐ $1{,}4 \,.\, 10^{-4}$ ☐ $0{,}14 \,.\, 10^{6}$ ☐

b) 0,000067 → $6{,}7 \,.\, 10^{5}$ ☐ $0{,}67 \,.\, 10^{-4}$ ☐ $67 \,.\, 10^{-6}$ ☐ $6{,}7 \,.\, 10^{-5}$ ☐

Operaciones en notación científica

Teoría

Para operar utilizando la notación científica, se utilizan dos propiedades de la potenciación.

- Producto de potencias de igual base: $10^n \,.\, 10^m = 10^{n+m}$
- Cociente de potencias de igual base: $10^n : 10^m = \dfrac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$

El resultado de la operación debe ser expresado en notación científica.

a) $120\,000 \,.\, 5\,000 = 1{,}2 \,.\, 10^5 \,.\, 5 \,.\, 10^3 = 1{,}2 \,.\, 5 \,.\, 10^5 \,.\, 10^3 = 6 \,.\, 10^8$

b) $0{,}000000035 \,.\, 42\,000 = 3{,}5 \,.\, 10^{-8} \,.\, 4{,}2 \,.\, 10^4 = 3{,}5 \,.\, 4{,}2 \,.\, 10^{-8} \,.\, 10^4 = 14{,}7 \,.\, 10^{-4} = 1{,}47 \,.\, 10^1 \,.\, 10^{-4} = 1{,}47 \,.\, 10^{-3}$

c) $2\,500\,000\,000 : 4\,000 = \dfrac{2{,}5 \,.\, 10^9}{4 \,.\, 10^3} = \dfrac{2{,}5}{4} \cdot \dfrac{10^9}{10^3} = 0{,}625 \,.\, 10^6 = 6{,}25 \,.\, 10^{-1} \,.\, 10^6 = 6{,}25 \,.\, 10^5$

d) $18\,000 : 0{,}000025 = \dfrac{1{,}8 \,.\, 10^4}{2{,}5 \,.\, 10^{-5}} = \dfrac{1{,}8}{2{,}5} \cdot \dfrac{10^4}{10^{-5}} = 0{,}72 \,.\, 10^9 = 7{,}2 \,.\, 10^{-1} \,.\, 10^9 = 7{,}2 \,.\, 10^8$

72 **Resolver aplicando propiedades.**

a) $10^2 \,.\, 10^{-5} \,.\, 10^7 =$

b) $10 \,.\, 10^9 : 10^3 =$

c) $10^6 \,.\, 10^{-2} : 10^{-5} =$

d) $\dfrac{10^{11}}{10^4 \,.\, 10^2} =$

e) $\dfrac{10^3 \,.\, 10^{-7}}{10 \,.\, 10^2} =$

f) $\dfrac{10^{-6} \,.\, 10^2}{10^{-3} \,.\, 10^{-5}} =$

73 **Resolver utilizando y expresando el resultado en notación científica.**

a) $800\,000 \,.\, 40\,000 =$

b) $0{,}000006 : 2\,000 =$

c) $\dfrac{150\,000 \,.\, 0{,}0000004}{80\,000} =$

d) $\dfrac{0{,}00000024 \,.\, 0{,}0002}{0{,}000016} =$

LENGUAJE COLOQUIAL Y LENGUAJE SIMBÓLICO

La gente en la vida cotidiana tiende a no pensar problemas reales en términos matemáticos. Usan el lenguaje común para describir estas situaciones. Pero las palabras se pueden traducir en el lenguaje de las matemáticas.

Lenguaje coloquial

Es el que usamos normalmente, que puede ser oral o escrito, y está formado por las distintas palabras del idioma.

Lenguaje simbólico

Se denomina así a las ideas matemáticas expresadas con un símbolo o grupo de símbolos.

En matemática constantemente pasamos del lenguaje simbólico al coloquial y viceversa, puesto que esto permite el planteamiento y la resolución de distintas situaciones problemáticas.

Algunos ejemplos sencillos de conversiones de un lenguaje a otro son:

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico	La cuarta parte de un número	$\frac{1}{4}x$
Un número	x	Las dos terceras partes de un número	$\frac{2}{3}x$
El doble de un número	$2x$	Un número aumentado en … unidades	$x + \ldots$
El triple de un número	$3x$	Un número disminuido en … unidades	$x - \ldots$
El cuádruplo de un número	$4x$	El anterior de un número	$x - 1$
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$	El siguiente de un número	$x + 1$
La tercera parte de un número	$\frac{1}{3}x$	Números consecutivos	$x \quad x + 1$

Importante

- Para expresiones en lenguaje simbólico aquí utilizaremos la letra *x* (que es la más frecuente), aunque es indistinto usar cualquier otra letra.
- Si entre un número y una letra no se indica la operación, se entiende que hay un signo de multiplicar. Ejemplo: $4x = 4.x$.

Ejemplos

- Pasamos la expresión coloquial *"el doble de un número disminuido en uno"* a expresión simbólica: $\mathbf{2x - 1}$.

- Pasamos la expresión simbólica **4*x* + (4*x* + 1)** a expresión coloquial: *"el cuádruplo de un número mas el consecutivo de este último"*.

Actividades:

1) Unir con una flecha cada oración con su expresión simbólica.

	$\frac{1}{4}x$
La suma entre un número y su cuarta parte	$4x$
El siguiente de la cuarta parte de un número	$x+\frac{1}{4}x$
La cuarta parte del siguiente de un número	$x-\frac{1}{4}x$
La diferencia entre un número y su cuarta parte	$\frac{1}{4}x+1$
	$\frac{1}{4}(x+1)$

2) Completar la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El triple del siguiente de un número	
	$2x + 1$
El doble del anterior de un número	

ECUACIONES

Teoría

Una ecuación de primer grado es aquella cuya forma reducida es **ax + b = 0**.

a)

$$0,\overline{2}\cdot\left(\frac{3}{4}x-6\right)-1,\hat{2}x+\frac{5}{6}=x+1$$
$$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}x-6\right)-\frac{11}{9}x+\frac{5}{6}=x+1$$
$$\frac{1}{6}x-\frac{4}{3}-\frac{11}{9}x+\frac{5}{6}=x+1$$
$$\frac{1}{6}x-\frac{11}{9}x-x=1+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$$
$$\frac{3x-22x-18x}{18}=\frac{6+8-5}{6}$$
$$-\frac{37}{18}x=\frac{9}{6}$$
$$x=\frac{3}{2}:\left(-\frac{37}{18}\right)$$
$$x=-\frac{27}{37}$$

b)

$$\frac{2x+3}{5}-\frac{x-2}{3}=0,8x-\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}$$
$$\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}x-\frac{4}{5}x=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}$$
$$\frac{6x-5x-12x}{15}=\frac{-3-9-10}{15}$$
$$-\frac{11}{15}x=-\frac{22}{15}$$
$$x=-\frac{22}{15}:\left(-\frac{11}{15}\right)$$
$$x=2$$

Actividades: Resuelvan las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-1)+2=-4x+1$

b) $\frac{1}{3}x-1=2.\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}\right)$

c) $\frac{x-1}{2}+1=\frac{1}{5}x$

d) $\frac{3}{5}x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)=x+\frac{3}{10}$

e) $3(0,2x-1)+1,2=0,5+x$

f) $0,\hat{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right)$

g) $\frac{3x-1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{x+1}{3}$

h) $5\left(0,\hat{2}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}x$

RESOLUCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Para resolver un problema es necesario traducir el enunciado al lenguaje simbólico, plantear la ecuación correspondiente, resolverla y hallar la solución.

Las ecuaciones con números racionales se resuelven aplicando los mismos procedimientos y propiedades que con los números enteros.

a. La tercera parte de un poste se pinta de rojo, la cuarta parte de verde y quedan 5 m sin pintar. ¿Cuál es la altura del poste?

Traducción al lenguaje simbólico:

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x+5=x$$

Resolución de la ecuación:

$$\frac{7}{12}x+5=x$$

$$5=x-\frac{7}{12}x$$

$$5=\frac{5}{12}x$$

$$5:\frac{5}{12}=x$$

$$12=x$$

El poste mide 12 m.

b. Una persona gasta la mitad de su sueldo en comida y las dos quintas partes del resto en ropa. Si aún le quedan \$ 180, ¿cuál es su sueldo?

Traducción al lenguaje simbólico:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}\left(x-\frac{1}{2}x\right)+180=x$$

Resolución de la ecuación:

$$\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}x+180=x$$

$$\frac{7}{10}x+180=x$$

$$180=x-\frac{7}{10}x$$

$$180=\frac{3}{10}x$$

$$180:\frac{3}{10}=x \Rightarrow 600=x$$

El sueldo es de \$ 600.

Actividades:

Traducir a lenguaje simbólico y resolver.

a) La suma entre dos novenos y tres quintos.

b) La suma entre el cuádruplo de cinco sextos y tres.

c) La diferencia entre tres cuartos y un medio.

d) La diferencia entre la mitad de cinco y la tercera parte de ocho.

e) El producto entre un centésimo y la suma entre un noveno y uno.

f) El cociente entre siete décimos y la quinta parte de tres.

g) La mitad del cubo de cuatro tercios.

Razones y proporciones aritméticas

Teoría

Una **razón** es la expresión del cociente entre dos números reales: $r = \frac{a}{b} \wedge a \in \Re \wedge b \in \Re - \{0\}$

a) $\frac{0,2}{5} = 0,04$ b) $\frac{-7,5}{3} = -2,5$ c) $\frac{\frac{2}{5}}{-4} = -0,1$ d) $\frac{-1,4}{-\frac{7}{2}} = 0,4$

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

- Si los números a, b, c y d son distintos, la proporción es **ordinaria** y cada uno de ellos se denomina **extremo**.

a) $\frac{5}{1,2} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow \underbrace{1,2 . 25}_{30} = \underbrace{5 . 6}_{30}$ b) $\frac{-0,5}{0,8} = \frac{-2}{3,2} \Leftrightarrow \underbrace{0,8 . (-2)}_{-1,6} = \underbrace{-0,5 . 3,2}_{-1,6}$

- Si hay dos extremos iguales, se denominan **medios** y la proporción es **continua.**

a) $\frac{4,5}{3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underbrace{3 . 3}_{9} = \underbrace{4,5 . 2}_{9}$ b) $\frac{-1,5}{9} = \frac{0,25}{-1,5} \Leftrightarrow \underbrace{-1,5 . (-1,5)}_{2,25} = \underbrace{9 . 0,25}_{2,25}$

1 **Unir las razones iguales.**

a) $\frac{0,7}{5}$ d) $\frac{-2,4}{-\frac{3}{25}}$ g) $\frac{\frac{3}{4}}{-1,25}$

b) $\frac{\frac{7}{3}}{-2,\overline{3}}$ e) $\frac{-0,4}{-\frac{1}{5}}$

c) $\frac{-3}{1,5}$ f) $\frac{0,\overline{5}}{0,2}$

$\frac{-0,32}{\frac{8}{25}}$ $\frac{0,9}{-\frac{3}{2}}$ $\frac{-\frac{4}{3}}{-0,6}$

$\frac{\frac{5}{6}}{-0,2}$ $\frac{-\frac{4}{3}}{-0,5\overline{3}}$ $\frac{0,0\overline{3}}{\frac{5}{21}}$

$\frac{\frac{2}{5}}{0,02}$ $\frac{-0,75}{\frac{3}{8}}$

2 **Colocar = o ≠ según corresponda en cada caso.**

a) $\frac{0,2}{5} \square \frac{0,8}{20}$ c) $\frac{-0,3}{-\frac{1}{2}} \square \frac{6}{-10}$ e) $\frac{1}{-\sqrt{2}} \square \frac{\sqrt{8}}{-4}$

b) $\frac{-3}{\frac{3}{5}} \square \frac{-5}{0,1}$ d) $\frac{-\frac{5}{2}}{3} \square \frac{13,\overline{3}}{-8}$ f) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \square \frac{-\sqrt{50}}{-\sqrt{5}}$

3 **Hallar el valor de x en cada una de las siguientes razones.**

a) $\frac{x}{1,2} = 5 \Rightarrow x =$ c) $\frac{x+1}{-\frac{3}{5}} = 2 \Rightarrow x =$ e) $\frac{2x+1}{0,7} = -3 \Rightarrow x =$

b) $\frac{0,3}{x} = -0,12 \Rightarrow x =$ d) $\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} = -0,2 \Rightarrow x =$ f) $\frac{-\frac{3}{2}}{3x-2} = 0,5 \Rightarrow x =$

Cálculo de los extremos

Teoría

Para calcular el **extremo** de una proporción **ordinaria** se aplica la propiedad fundamental de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c \Rightarrow a = \frac{b.c}{d}$$

a) $\frac{x}{1{,}2} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1{,}2 . 3}{5} \Rightarrow x = 0{,}72$ b) $\frac{8}{x-3} = \frac{-5}{2} \Rightarrow x - 3 = \frac{8 . 2}{-5} \Rightarrow x - 3 = -3{,}2 \Rightarrow x = -3{,}2 + 3 \Rightarrow x = -0{,}2$

c) $\frac{2x+1}{3} = \frac{x-2}{5} \Rightarrow (2x+1) . 5 = 3 . (x-2) \Rightarrow 10x + 5 = 3x - 6 \Rightarrow 10x - 3x = -6 - 5 \Rightarrow 7x = -11 \Rightarrow x = -\frac{11}{7}$

4 **Completar la tabla de manera que se verifique que $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$.**

x	y	z	w
	0,1	3	5
		$\frac{2}{3}$	0,5
0,8	$-\frac{2}{5}$		-4

5 **Hallar el valor de x en las siguientes proporciones.**

a) $\frac{x+2}{0{,}8} = \frac{-5}{0{,}2}$ c) $\frac{-\frac{8}{7}}{1{,}5} = \frac{3x+1}{10{,}5}$ e) $\frac{2x-3}{-\frac{1}{3}} = \frac{3x}{0{,}5}$

b) $\frac{0{,}\hat{2}}{x-3} = \frac{2}{-4{,}5}$ d) $\frac{0{,}25}{-\frac{3}{4}} = \frac{0{,}\hat{6}}{8-5x}$ f) $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{-2}{3}$

Cálculo de los medios

Teoría

Para calcular los **medios** de una proporción **continua** se aplican propiedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = a.c \Rightarrow |b| = \sqrt{a.c}$$

a) $\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow x^2 = 3 . 12 \Rightarrow |x| = \sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

b) $\frac{x+2}{6} = \frac{24}{x+2} \Rightarrow (x+2)^2 = 6 . 24 \Rightarrow |x+2| = \sqrt{144} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 12 & \Rightarrow x_1 = 10 \\ x + 2 = -12 & \Rightarrow x_2 = -14 \end{cases}$

1) Expresa en forma de razón los siguientes enunciados:

a) Hay tres libros por cada ocho alumnos.
b) Hay una mesa por cada seis alumnos.
c) Hay cuatro alumnos por cada mesa.

2) Escribe cuatro razones iguales a cada una de las siguientes:

a) $\frac{2}{3}$ b) — 0,2 c) — 3

3) Aplica la propiedad fundamental para verificar si los cuatro números dados en cada caso forman proporción. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a) $\frac{6}{7} = \frac{7}{8}$ b) $\frac{10}{15} = \frac{4}{6}$ c) $\frac{8}{12} = \frac{6}{9}$

d) $\frac{5}{9} = \frac{4}{7}$ e) $\frac{4}{9} = \frac{3}{7}$ f) $\frac{8}{10} = \frac{12}{15}$

Actividad 4:

Calculen el valor de x en cada una de las siguientes proporciones.

a) $\frac{5}{x} = \frac{12}{6}$ d) $\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{3}{4}}$ g) $\frac{x}{\frac{1}{36}} = \frac{4}{x}$

b) $\frac{0,1}{0,2} = \frac{x}{0,3}$ e) $\frac{-\frac{5}{4}}{5} = \frac{x}{0,2}$ h) $\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{0,27}{x}$

REGLA DE TRES SIMPLE

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA:
La regla de tres simple directa es un método para solucionar problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales.

Supuesto y pregunta:
En una regla de tres, el **supuesto** está constituido por los datos del problema que ya se conocen y la **pregunta** por los datos del problema que contiene la incógnita.

Si 4 gorras cuestan 8 USD, cuánto costará 12 gorras?

	Cantidades principales	Cantidades relativas
Supuesto →	4 gorras ----------------------	$8
Pregunta →	12 gorras ----------------------	X

Se puede resolver de dos maneras:

Primer método. (Por las proporciones)

$$\frac{4}{8} = \frac{12}{x}$$

$$x = \frac{8 \times 12}{4} = \$24$$

Segundo método. (Directo)

Supuesto → 4 gorras \$8

Pregunta → 12 gorras X

$$x = \frac{12 \times 8}{4} = \$24$$

Actividad 5) Plantear y resolver los siguientes problemas.

a) El 75% de los chicos del club del barrio, juegan al fútbol y 40 chicos juegan al básquet. ¿Cuántos alumnos hay en el club?

b) ESTAMOS DE OFERTAS! Se venden remeras con el 20% de descuento y en 3 cuotas de \$175. ¿Cuánto cuestan las remeras sin el descuento?

c) 9 de cada 20 alumnos de una escuela, no aprueba Educación Física entonces ¿Qué porcentaje de los alumnos aprueba?

d) El 80% de las velas que se fabrican por día son blancas y 200 de colores. ¿Cuántas velas en total fabrican por día?

e) Se vende un camisa con el 15% de descuento, si el descuento fue de \$250. ¿Cuánto costaba la camisa sin el descuento?

f) 10 de cada 50 alumnos de una escuela no aprueba Música, entonces ¿Qué porcentaje de los alumnos, aprueba Música?

g) El 40% de los alfajores que se fabrican por día son de fruta y 300 son de pera. ¿Cuántos alfajores fabrican por día?

h) Una heladera con un recargo del 28% sobre su precio se abona en 12 cuotas iguales de \$3540. ¿Cuál era el precio de la heladera sin el recargo?

i) 4 de cada 10 infectados por covid-19 es asintomático, entonces ¿Qué porcentaje de los pacientes presenta al menos un síntoma?

Teorema de Thales

Teoría

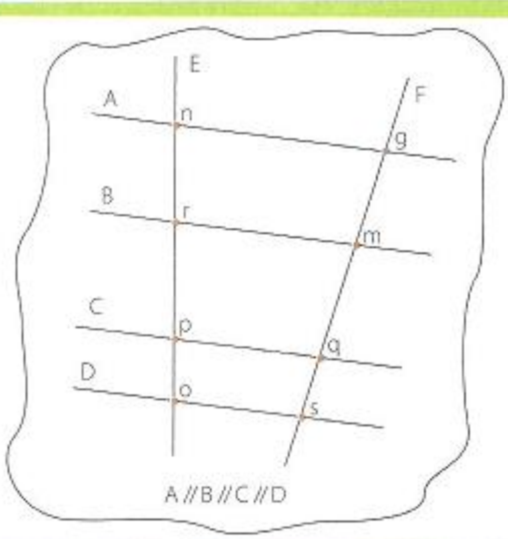
Cuando tres o más rectas paralelas (A, B, C y D) son cortadas por dos transversales (E y F), quedan determinados en ambas transversales varios segmentos ($\overline{nr}$, $\overline{rp}$, $\overline{gm}$, $\overline{ms}$, etc.).

Los segmentos **homólogos** son los que se encuentran entre dos paralelas y uno en cada transversal. Por ejemplo: $\overline{nr}$ y $\overline{gm}$ son homólogos, y también lo son $\overline{ro}$ y $\overline{ms}$.

La razón entre cualquier par de segmentos determinados en una de las transversales es igual a la razón de sus homólogos.

$$\frac{\overline{nr}}{\overline{rp}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{mq}} \wedge \frac{\overline{rp}}{\overline{po}} = \frac{\overline{mq}}{\overline{qs}} \wedge \frac{\overline{ro}}{\overline{np}} = \frac{\overline{ms}}{\overline{gq}} \wedge \frac{\overline{no}}{\overline{ro}} = \frac{\overline{gs}}{\overline{ms}}$$

Los segmentos homólogos son **proporcionales** entre sí.



20 **Completar con el segmento que corresponda en cada caso.**

a) $\frac{\overline{ae}}{\overline{nf}} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{\overline{bo}}{\overline{gd}} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{\overline{ec}}{\overline{af}} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{\overline{io}}{\overline{bg}} = \frac{\square}{\square}$

e) $\frac{\overline{en}}{\overline{ef}} = \frac{\square}{\square}$

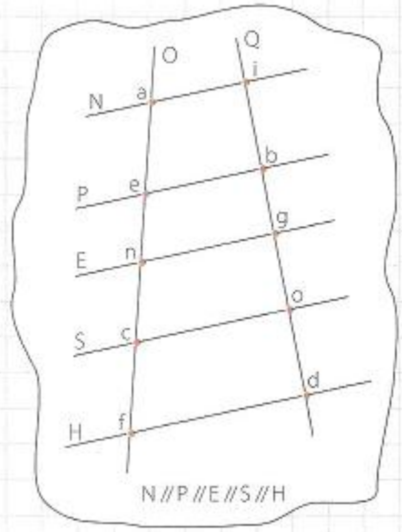
f) $\frac{\overline{od}}{\overline{gi}} = \frac{\square}{\square}$

g) $\frac{\overline{cf}}{\square} = \frac{\square}{\overline{oi}}$

h) $\frac{\overline{og}}{\square} = \frac{\square}{\overline{af}}$

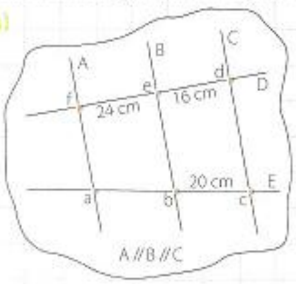
i) $\frac{\square}{\overline{ac}} = \frac{\overline{gd}}{\square}$

j) $\frac{\square}{\overline{bi}} = \frac{\overline{nf}}{\square}$



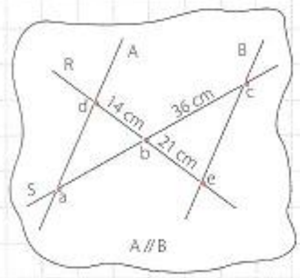
21 **Hallar la longitud del segmento $\overline{ab}$ de cada figura.**

a)



b)

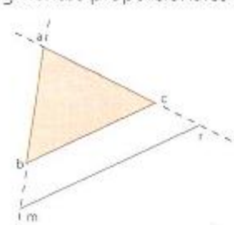
c)



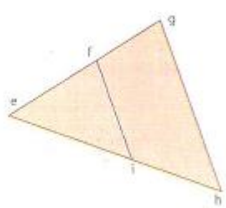
Consecuencia del teorema de Thales

Teoría

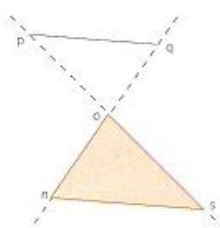
Toda recta paralela a cualquier lado de un triángulo determina, sobre las rectas que contienen a los otros dos lados, segmentos proporcionales a ellos.



$\overline{bc} \,//\, \overline{mr} \Rightarrow \frac{\overline{ab}}{\overline{am}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{ar}}$



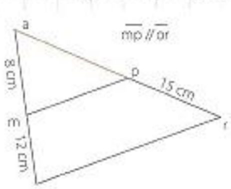
$\overline{fi} \,//\, \overline{gh} \Rightarrow \frac{\overline{eg}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{eh}}{\overline{ei}}$



$\overline{pq} \,//\, \overline{ns} \Rightarrow \frac{\overline{os}}{\overline{op}} = \frac{\overline{on}}{\overline{oq}}$

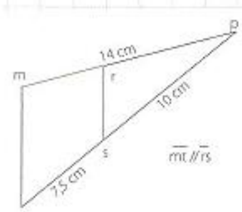
23 **Hallar la longitud del segmento rojo en cada una de las siguientes figuras.**

a)



b)

c)



UNIDAD 3 – GEOMETRIA – POLÍGONOS

Teóricamente

Un polígono es la región del plano limitado por tres o más rectas que se cortan dos a dos.

poli — pluralidad (muchos)
góno — ángulo

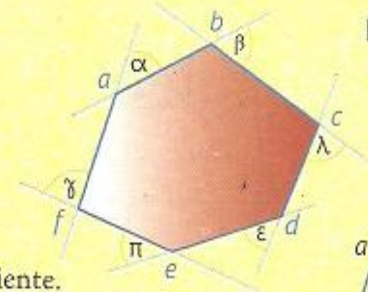
Elementos de un polígono:

Vértices: a, b, c, d, e, f

Lados: $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}, \overline{fa}$

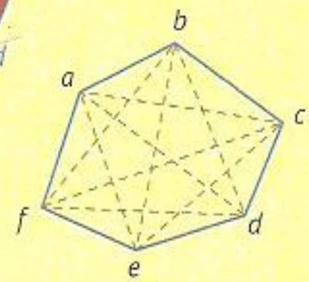
Ángulos interiores: $a\hat{b}c, b\hat{c}d, c\hat{d}e, d\hat{e}f, e\hat{f}a, f\hat{a}b$

Ángulos exteriores: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}, \hat{\varepsilon}, \hat{\pi}, \hat{\gamma}$



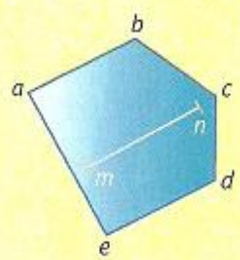
Cada ángulo interior tiene su exterior correspondiente.

Las diagonales de un polígono son los segmentos cuyos extremos son dos vértices no consecutivos.

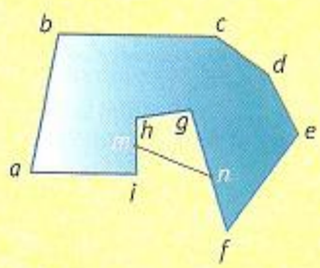


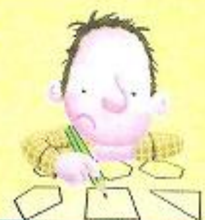
Los polígonos se clasifican en cóncavos y convexos.

Un polígono es **convexo** cuando cualquier par de puntos pertenecientes al polígono determinan siempre un segmento incluido en el mismo.



Un polígono es **cóncavo** cuando existe por lo menos un par de puntos pertenecientes al polígono que determinan un segmento no incluido en el mismo.

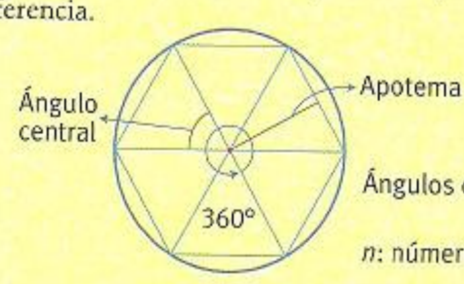




N.º DE LADOS	NOMBRE
3	Triángulo
4	Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

En este capítulo se estudiarán los polígonos convexos.

Un polígono es regular cuando tiene todos sus lados y ángulos interiores iguales. Los polígonos regulares se pueden inscribir en una circunferencia.



Ángulos centrales $= \dfrac{360°}{n}$

n: números de lados del polígono

Actividades:

1) Calcular cuántos lados tiene un polígono regular, cuyo ángulo central mide 45°

2) **Clasifiquen los siguientes polígonos en cóncavos y convexos.**

1. 2. 3. 4.

3) **Inscriban cada uno de los siguientes polígonos en una circunferencia.**

1. Triángulo equilátero. 2. Pentágono regular. 3. Hexágono regular.

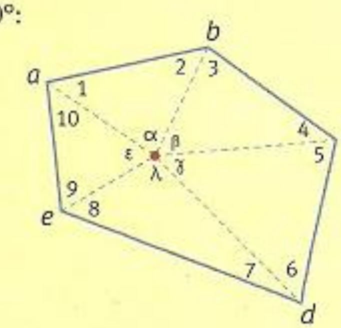
4) **Completen el siguiente cuadro referido a polígonos regulares.**

	Nombre del polígono	Número de lados	Ángulo central
1.	cuadrilátero		
2.			72°
3.		6	
4.			45°
5.		10	
6.	icoságono		

Propiedades de los polígonos

Teóricamente

El pentágono *abcde* está dividido en cinco triángulos. Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°:



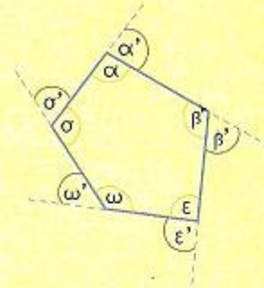
$$\hat{1}+\hat{\alpha}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{\beta}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{\gamma}+\hat{6}+\hat{7}+\hat{\lambda}+\hat{8}+\hat{9}+\hat{\varepsilon}+\hat{10}=180^\circ.5$$

$$\hat{1}+\hat{10}=\hat{a}$$
$$\hat{2}+\hat{3}=\hat{b}$$
$$\hat{4}+\hat{5}=\hat{c} \qquad \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}+\hat{\lambda}+\hat{\varepsilon}=360^\circ$$
$$\hat{6}+\hat{7}=\hat{d}$$
$$\hat{8}+\hat{9}=\hat{e}$$

$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}+360^\circ=180^\circ.5 \Rightarrow \hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}=180^\circ.5-180^\circ.2$$
$$\hat{a}+\hat{b}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{e}=180^\circ.(5-2)=180^\circ.3=540^\circ$$

Propiedad de los ángulos interiores

En todo polígono de n lados, la suma de sus ángulos interiores es igual a **$180°.(n-2)$**.
Cada ángulo interior es suplementario con el exterior correspondiente.



$$\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\varepsilon}' + \hat{\omega}' + \hat{\sigma}' = 360°$$
$$\alpha' + \beta' + \varepsilon' + \omega' + \sigma' = 360°$$

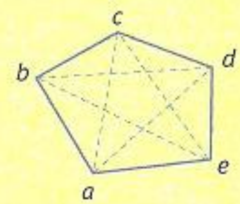
Propiedad de los ángulos exteriores

En todo polígono la suma de los ángulos exteriores es igual a **360°**.
Cada ángulo exterior es suplementario con el interior correspondiente.

Propiedades de las diagonales

En todo polígono de n lados:
Por cada vértice se pueden trazar **$n-3$** diagonales.
El número total de diagonales es igual a $\mathbf{\frac{n.(n-3)}{2}}$.

Sea el pentágono *abcde*.
La suma de los ángulos interiores:
s.a.i. = 180°.(5 – 2) = 180°.3 = 540°
La suma de los ángulos exteriores s.a.e. = 360°
Por cada vértice se pueden trazar: 5 – 3 = 2 diagonales.
El número total de diagonales es: $\frac{5.(5-3)}{2}$ = 5 diagonales.



Actividades:

EJERCICIO 39.1

- **Completen la siguiente tabla.**

	n	Suma de ángulos interiores	Número de diagonales por vértice	Número total de diagonales
1.	4			
2.	6			
3.		1.260°		
4.		1.620°		
5.			12	
6.			17	

EJERCICIO 39.2

- **Calculen el valor de cada uno de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.**

1. En el pentágono *abcde*:
$\hat{a} = 2x$; $\hat{b} = 3x - 11°$; $\hat{c} = \hat{a} + 10°$; $\hat{d} = \hat{b} + 10°$; $\hat{e} = 4x - 60°$.

2. En el cuadrilátero *mnrt*:
$\hat{m} = 2\hat{t} + 10°$; $\hat{r} = \hat{t} + 30°$; $\hat{n} = \hat{m} + 10°$.

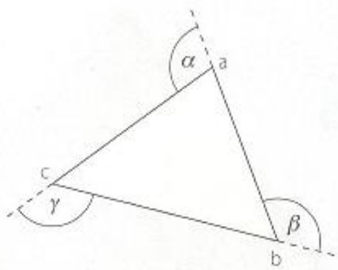
3. En el cuadrilátero *mgtp*:
$\hat{g} = 2x + 7°$; $\hat{m} = 3x - 10°$; $\hat{p} = \hat{m} - 62°$; $\hat{t} = \hat{g} - 22°$.

4. En el pentágono *obsqd*:
$\hat{s} = 2\hat{d}$; $\hat{b} = \hat{s} - 30°$; $\hat{o} = \hat{d} + 50°$; $\hat{q} = \hat{d} + 30°$

Elementos de un triángulo. Propiedad triangular

Teoría

Los elementos de un triángulo son:



Vértices: a, b y c
Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$
Ángulos interiores: $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$.
Ángulos exteriores: $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$.

Propiedad triangular:
La longitud de cada uno de los lados de un triángulo es **menor que la suma** de las longitudes de los otros dos, y **mayor que su diferencia** (positiva).
Al lado de **mayor longitud** se opone el ángulo de **mayor amplitud** y viceversa.

16 **Calcular la amplitud de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles.**

17 **Completar la tabla y clasificar cada triángulo $\hat{abc}$ según sus lados y ángulos.**

$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	Clasificación según sus lados	Clasificación según sus ángulos
73° 52' 37''	51° 16' 41''			
41° 21' 35''		32° 47' 36''		
	27° 52' 36''	62° 7' 24''		
82° 15' 28''	48° 52' 16''			
	25° 37' 24''	25° 37' 24''		

18 **Colocar SÍ o NO según se pueda o no construir un triángulo con los tres segmentos.**

a) A = 18 cm, B = 24 cm y C = 31 cm. ☐

b) D = 23 cm, E = 23 cm y F = 46 cm. ☐

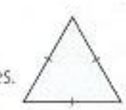
c) G = 33 cm, H = 21 cm y T = 55 cm. ☐

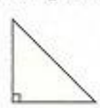
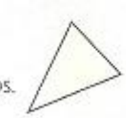
d) J = 79 cm, K = 35 cm y N = 42 cm. ☐

Clasificación de triángulos

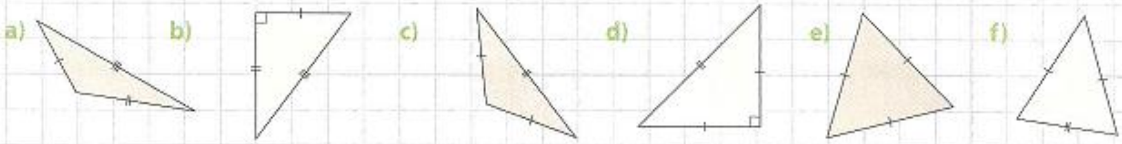
Teoría

Los triángulos se clasifican según la longitud de sus lados o la amplitud de sus ángulos.

Según sus lados
- Escaleno: los tres lados son distintos. 
- Isósceles: por lo menos dos lados son iguales.  → Equilátero: los tres lados son iguales. 

Según sus ángulos
- Rectángulo: un ángulo es recto. 
- Oblicuángulo: no tiene ningún ángulo recto.
  - Acutángulo: tres ángulos agudos. 
  - Obtusángulo: un ángulo obtuso. 

3) **Clasificar según sus lados y ángulos cada uno de los siguientes triángulos.**



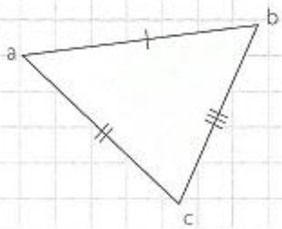
4) **Calcular y responder.**

a) Si el perímetro de un triángulo equilátero es de 114 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados?

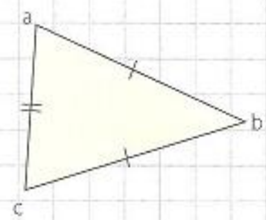
b) Si el perímetro de un triángulo isósceles es de 127 cm y el lado desigual mide 53 cm, ¿cuál es la longitud de cada uno de sus lados iguales?

5) **Plantear la ecuación y hallar la longitud de cada uno de los lados de los siguientes triángulos.**

a) $\begin{cases} \overline{ab} = 4x - 3 \text{ cm} \\ \overline{ac} = 3x + 1 \text{ cm} \\ \overline{bc} = 2x + 5 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 66 \text{ cm} \end{cases}$



b) $\begin{cases} \overline{ab} = 3x - 5 \text{ cm} \\ \overline{ac} = 2x + 2 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 96 \text{ cm} \end{cases}$



Propiedades de los ángulos de un triángulo

Teoría

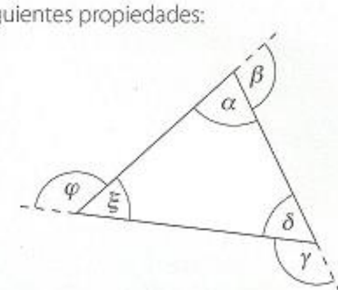
Los ángulos interiores y exteriores de un triángulo cumplen las siguientes propiedades:

I) $\hat{\alpha} + \hat{\delta} + \hat{\xi} = 180°$

II) $\begin{cases} \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180° \\ \hat{\delta} + \hat{\gamma} = 180° \\ \hat{\xi} + \hat{\varphi} = 180° \end{cases}$

III) $\hat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\varphi} = 360°$

IV) $\begin{cases} \hat{\beta} = \hat{\delta} + \hat{\xi} \\ \hat{\gamma} = \hat{\xi} + \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} = \hat{\alpha} + \hat{\delta} \end{cases}$



6) **Calcular la amplitud del ángulo $\hat{b}$ en el triángulo $a\hat{b}c$, si $\hat{a} = 64° 38' 52''$ y $\hat{c} = 75° 44' 39''$.**

7) **Hallar la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si el ángulo exterior a uno de ellos mide 117° 38′ 42″.**

8) **Plantear la ecuación y hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo $a\hat{b}c$, si $\hat{a} = 3x + 5°$, $\hat{b} = 2x + 45°$ y $\hat{c} = 9x - 10°$.**

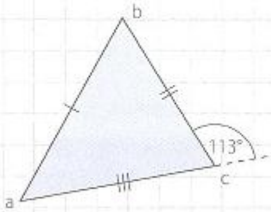
9) **Hallar la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes triángulos isósceles.**

a) Los ángulos iguales tienen una amplitud de 63° 49′ 52″.

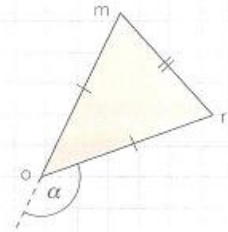
c) El ángulo exterior del ángulo opuesto a la base tiene una amplitud de 129° 14′ 46″.

10) Hallar la amplitud de los ángulos interiores de cada triángulo.

a) $\begin{cases} \hat{a} = 7x + 3° \\ \hat{b} = 8x + 5° \end{cases}$



b) $\begin{cases} \hat{\alpha} = 7x - 10° \\ \hat{m} = 2x + 22° \end{cases}$

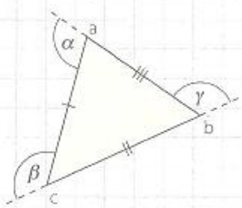


11) Calcular los ángulos interiores del triángulo $\widehat{mpr}$.

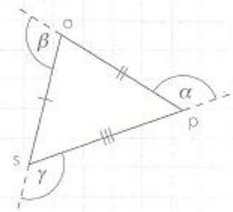
$\begin{cases} \hat{p} = 35°\,22'\,53'' \\ \hat{r} = \hat{p} + 13°\,46'\,29'' \end{cases}$

12) Hallar la amplitud de los ángulos interiores y exteriores de los siguientes triángulos.

a) $\begin{cases} \hat{a} = 13x \\ \hat{b} = 3x + 26° \\ \hat{c} = 4x + 28° \end{cases}$



b) $\begin{cases} \hat{\alpha} = 8x - 6° \\ \hat{\beta} = 6x - 1° \\ \hat{\gamma} = 7x - 11° \end{cases}$

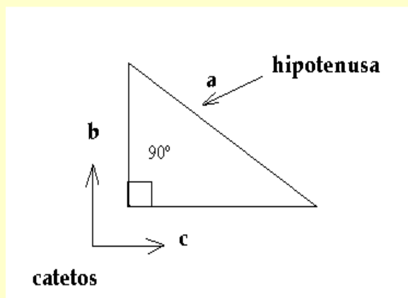


TEOREMA DE PITÁGORAS

TEOREMA DE PITÁGORAS: En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Si a es la hipotenusa y, b y c son los catetos, se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

CONCEPTOS PREVIOS
Triángulo rectángulo : Tiene un ángulo de 90°.
Catetos : Son los lados que forman el ángulo de 90° (perpendiculares).
Hipotenusa : Lado opuesto al ángulo de 90°.



Ejemplo:

Usar el Teorema de Pitágoras para hallar el lado que falta.

$a^2 + b^2 = c^2$ Teorema de Pitágoras

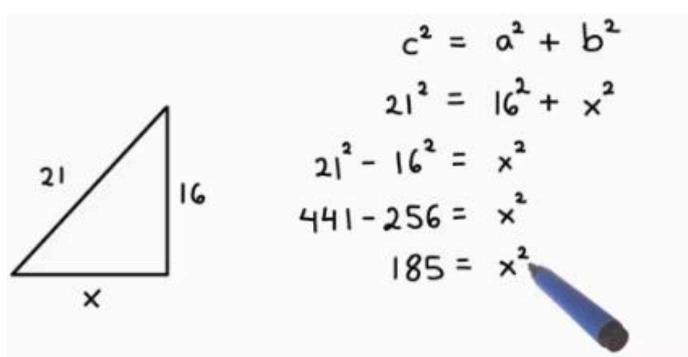
$6^2 + 8^2 = c^2$ Sustituye a y b

$36 + 64 = c^2$ Evalúa las potencias

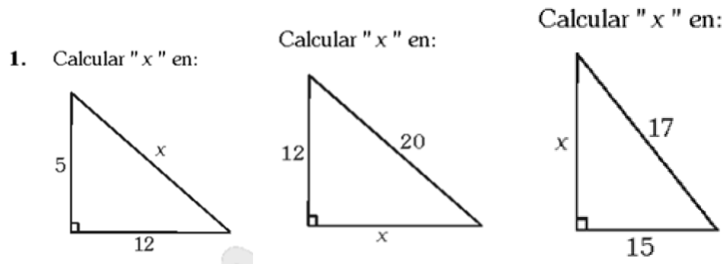
$100 = c^2$ Suma

$\sqrt{100} = \sqrt{c^2}$ Extraer la raíz cuadrada en ambos lado

$10 = c$ La hipotenusa mide 10 cm.



1) Aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar el valor de “x” en los siguientes triángulos rectángulos.



2) Plantear y resolver

a) Un faro de 16 metros de altura manda su luz a una distancia horizontal sobre el mar de 63 metros ¿Cuál es la longitud, en metros del haz de luz?

b) Desde un balcón de un castillo en la playa se ve un barco a 85 metros, cuando realmente se encuentra a 84 metros del castillo. ¿A qué altura se encuentra ese balcón?

CUADRILÁTEROS:

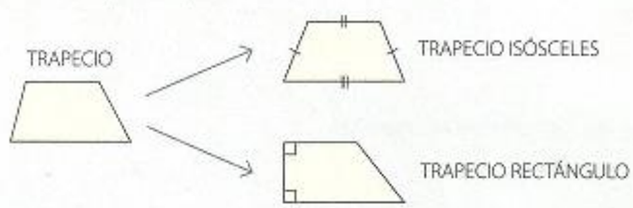
Clasificación de los cuadriláteros

Teoría

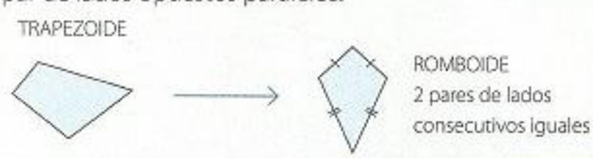
Los cuadriláteros se clasifican según la cantidad de lados opuestos paralelos.

- **Paralelogramos**: dos pares de lados opuestos paralelos.

- **Trapecios**: un par de lados opuestos paralelos.



- **Trapezoides**: ningún par de lados opuestos paralelos.



41 **Colocar V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda en cada caso.**

a) Todos los cuadrados son rectángulos. ☐

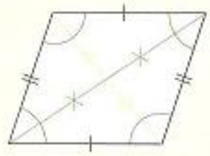
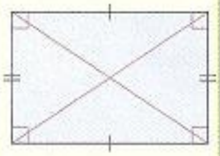
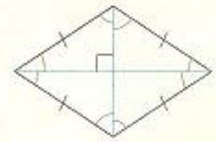
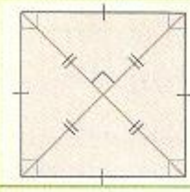
b) Algunos rectángulos no son paralelogramos. ☐

c) Todos los rombos son cuadrados. ☐

d) Algunos paralelogramos son rectángulos. ☐

Propiedades de los paralelogramos

Teoría

				
Lados	Opuestos iguales	Opuestos iguales	Todos iguales	Todos iguales
Ángulos	Opuestos iguales y los no opuestos suplementarios	Todos iguales	Opuestos iguales y los no opuestos suplementarios	Todos iguales
Diagonales	Se cortan en su punto medio	Son iguales	Son perpendiculares y bisectrices de los ángulos que intersecan	Iguales y perpendiculares

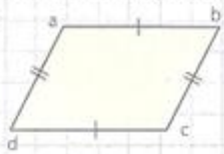
43 Calcular la amplitud de los ángulos interiores y exteriores de un paralelogramo cuyos ángulos no opuestos difieren en 50°.

44 Calcular la longitud de cada lado de un paralelogramo cuyo perímetro es de 160 cm y sus lados no opuestos difieren en 8 cm.

45 Calcular los ángulos interiores de los siguientes cuadriláteros.

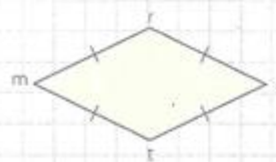
a) Paralelogramo abcd.

$$\begin{cases} \hat{a} = 8x - 2 \\ \hat{b} = 5x - 13° \end{cases}$$



b) Rombo mrst.

$$\begin{cases} \hat{r} = 5x + 78° \\ \hat{t} = 14x - 75° \end{cases}$$



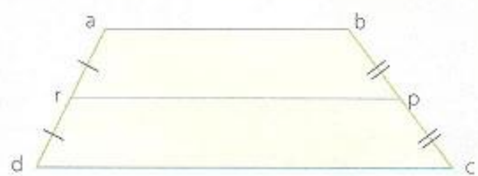
Propiedades de los trapecios

Teoría

Los lados paralelos de un trapecio se denominan **bases**.

La **base media** es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

La base media es paralela a las bases e igual a su semisuma. Los ángulos que comparten los lados no paralelos son suplementarios.



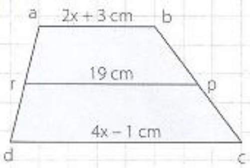
$$\overline{ab} // \overline{rp} // \overline{dc} \ \wedge \ \overline{rp} = \frac{\overline{ab} + \overline{dc}}{2}$$

$$\hat{a} + \hat{d} = 180° \ \wedge \ \hat{b} + \hat{c} = 180°$$

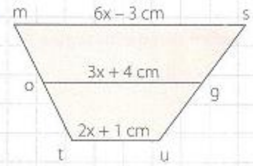
48 Hallar la base roja en cada uno de los siguientes trapecios.

49 **Hallar la longitud de las bases de los siguientes trapecios.**

a)

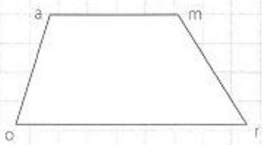


b)

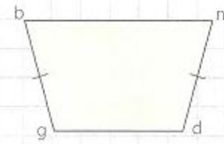


50 **Calcular los ángulos interiores de los siguientes trapecios.**

a) $\begin{cases} \hat{a} = 107° \, 26' 37'' \\ \hat{r} = 56° \, 42' 19'' \end{cases}$



b) $\begin{cases} \hat{b} = 7x - 50° \\ \hat{n} = 3x + 22° \end{cases}$



Propiedades del romboide

Teoría

Un **romboide** tiene dos pares de lados consecutivos iguales.
Los ángulos determinados por los lados no iguales son iguales.

Las diagonales son perpendiculares. La diagonal principal es bisectriz de los ángulos que interseca y mediatriz de la diagonal secundaria.

51 **Calcular el perímetro de un romboide cuyos lados no iguales miden 19 cm y 26 cm.**

52 **Calcular la amplitud de los ángulos interiores de un romboide cuyos ángulos iguales tienen una amplitud de 127° cada uno y los otros dos difieren en 12°.**

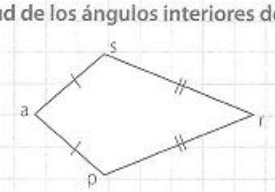
53 **Calcular la longitud de cada lado de los siguientes romboides.**

a) $\begin{cases} \overline{ab} = 7x - 5 \text{ cm} \\ \overline{bc} = 5x - 2 \text{ cm} \\ \overline{ad} = 4x + 1 \text{ cm} \end{cases}$

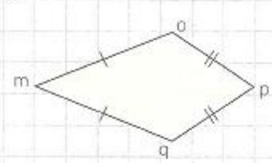
b) $\begin{cases} \overline{ot} = 2x + 3 \text{ cm} \\ \overline{rs} = 3x + 4 \text{ cm} \\ \text{Perímetro: } 84 \text{ cm} \end{cases}$

54 **Calcular la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes romboides.**

a) $\begin{cases} \hat{p} = 11x - 28° \\ \hat{s} = 5x + 62° \\ \hat{r} = 2x - 1° \end{cases}$



b) $\begin{cases} \hat{o} = 10x - 4° \\ \hat{p} = 5x - 14° \\ \hat{m} = 2x + 4° \end{cases}$



56 **Colocar V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda en cada caso.**

a) Un paralelogramo que tiene todos sus lados iguales es un cuadrado. ☐

b) Un rombo que tiene todos sus ángulos iguales es un rectángulo. ☐

c) Todos los cuadrados son rombos. ☐

d) Un trapecio con sus cuatro lados distintos es un trapezoide. ☐

e) Un paralelogramo puede tener todos sus lados distintos. ☐

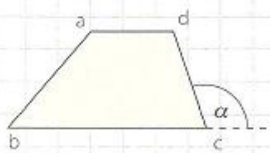
f) En un trapecio las bases deben ser distintas. ☐

g) Un romboide tiene las diagonales perpendiculares. ☐

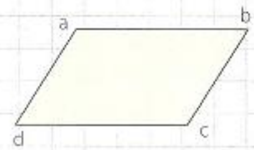
h) Un romboide tiene los lados opuestos paralelos. ☐

57 **Hallar la amplitud de los ángulos interiores de los siguientes cuadriláteros.**

a)
Trapecio abcd
$\hat{\alpha} = 117° 36' 49''$
$\hat{a} = \hat{b} + 52° 17' 38''$



b)
Paralelogramo abcd
$\hat{b} = \hat{a} - 52° 13' 48''$

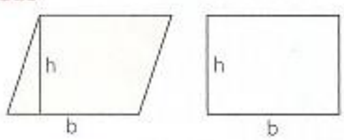


Perímetros y áreas

Teoría

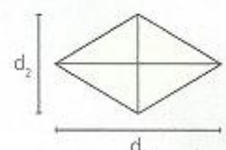
El **perímetro** de un polígono es la suma de sus lados. La **longitud** de una circunferencia es $2\pi . r$.

Áreas

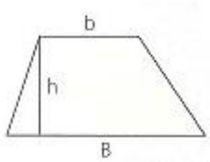


Área del paralelogramo: **b . h**

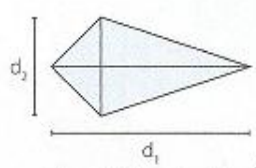
Área del cuadrado: l^2



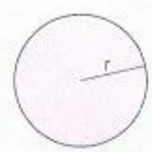
Área del rombo: $\frac{d_1 . d_2}{2}$



Área del trapecio: $\frac{(b + B) . h}{2}$



Área del romboide: $\frac{d_1 . d_2}{2}$

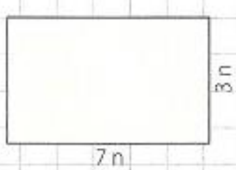


Área del círculo: $\pi . r^2$

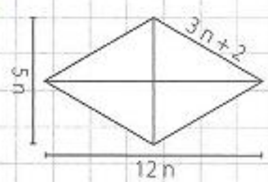
62 **Hallar la expresión reducida del perímetro y el área de cada figura.**

a)

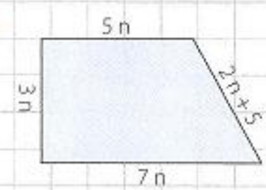
b)



c)



d)



63 **Calcular el área de las siguientes figuras.**

a) Un cuadrado de 104 cm de perímetro.

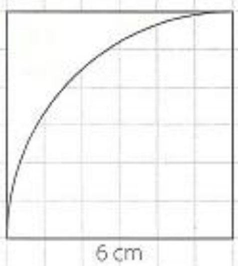
b) Un rectángulo cuya base es el doble que la altura y tiene 78 cm de perímetro.

c) Un cuadrado de 12 cm de diagonal (sin aplicar la propiedad pitagórica).

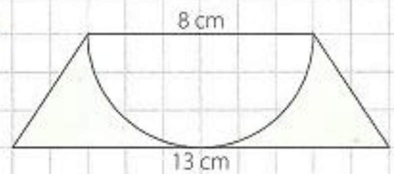
d) Un círculo cuya longitud de circunferencia es de 157 cm ($\pi \cong 3{,}14$).

64 **Hallar el área de la figura verde.**

a)

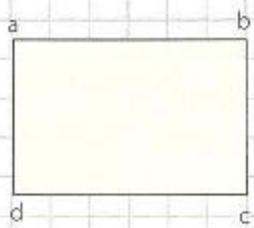


b)

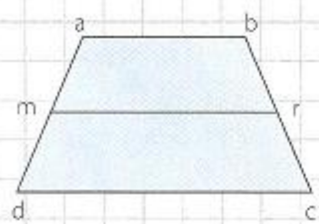


65 **Hallar el perímetro de cada figura.**

a) $\begin{cases} \overline{ab} = 3\overline{bc} \\ \text{Área: } 147 \text{ cm}^2 \end{cases}$

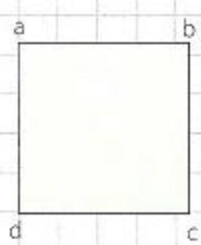


b) $\begin{cases} \overline{mr} = 12 \text{ cm} \\ \overline{ad} = \overline{bc} = 7 \text{ cm} \end{cases}$



66 **Hallar el área de cada figura.**

a) $\begin{cases} \overline{bc} = 5x - 3 \text{ cm} \\ \overline{ab} = x + 5 \text{ cm} \end{cases}$



c) $\begin{cases} \overline{ao} = 11 \text{ cm} \\ \overline{sg} = 17 \text{ cm} \\ \overline{og} = 10 \text{ cm} \end{cases}$