ESCUELA NORMAL SUPERIOR Y

SUPERIOR DE COMERCIO N° 46

"Domingo Guzmán Silva"

Cuadernillo de Matemática

3er año

Ciclo lectivo 2025

Organización del cuadernillo

Acuerdo Pedagógico

Pautas de trabajo y convivencia:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- A partir del 2do año, **es necesario contar con calculadoras científicas** como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en **formato papel.**
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

Para acreditar la materia:

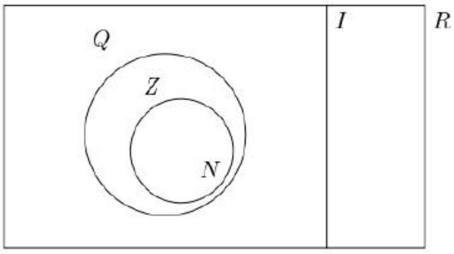
- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.

……………………………………… Firma estudiante

………………………………………………… Firma padre/madre/tutor

Unidad I: Números Reales y Complejos

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ está formado por el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ y los números irracionales $\mathbb{I}$.

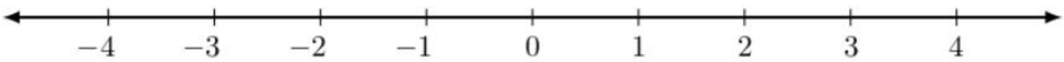


Los números naturales sirven para contar y para numerar. Se puede sumar y multiplicar y el resultado de esas operaciones es un número natural.

Los números naturales no siempre pueden restarse por ejemplo, $8 - 12 = -4$

Aparecen así los números negativos.

Se define el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, formado por los números naturales, sus correspondientes negativos y el cero. El conjunto $\mathbb{Z}$ está totalmente ordenado, por eso se representa en la recta numérica.



En $\mathbb{Z}$ podemos sumar y restar con la seguridad de que el resultado es un número entero, pero no siempre se puede resolver la división por ejemplo, $3 : 8 = \frac{3}{8}$

Aparecen así los números fraccionarios, que surgen de la necesidad de expresar porciones de la unidad y en especial cuando se realizan mediciones.

El conjunto formado por los números enteros y los fraccionarios se designa con $\mathbb{Q}$ y es el conjunto de los números racionales.

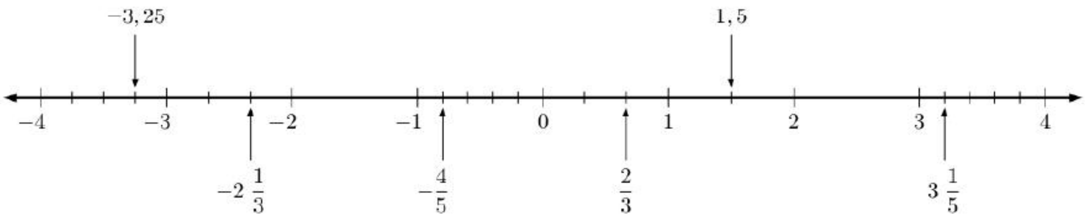
En $\mathbb{Q}$ podemos sumar, restar, multiplicar y dividir con la seguridad de que el resultado es un número racional. Los números racionales, se pueden expresar como cociente de dos números enteros, es decir como una razón.

$$\frac{a}{b} \quad a \; y \; b \quad son\; enteros\; y \quad b \neq 0$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} Ej. = & -\frac{3}{5} & ; & 7 & ; & 0 & ; & 2{,}81 & ; & \widehat{0{,}6} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & -\frac{3}{5} & & \frac{7}{1} & & \frac{0}{1} & & \frac{281}{100} & & \frac{2}{3} \end{array}$$

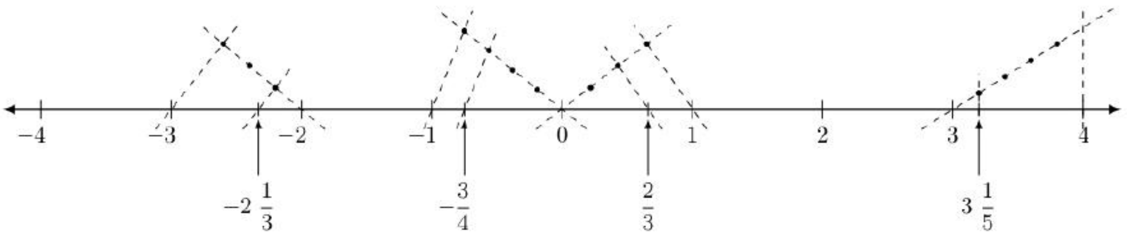
El conjunto de los números racionales

- ✓ Es un conjunto infinito, no tiene ni primer ni último elemento.
- ✓ Pueden expresarse como decimales finitos o periódicos.
- ✓ Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso decimos que es un conjunto denso.
- ✓ A todo racional le corresponde un punto en la recta numérica, pero no a todo punto le corresponde un número racional.



Para ubicar los números racionales, por ejemplo $\frac{2}{3}$ se divide la unidad en 3 partes y se toman 2 contando a partir de cero.

Para graficar con mayor precisión lo hacemos a través del teorema de Tales. Con un segmento auxiliar se marcan 3 unidades y se toman 2, se traza una paralela a la recta $\overleftrightarrow{bc}$.



Aparecen los números como $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ que no son racionales porque no pueden escribirse como cociente de dos números enteros, ni como decimal exacto o periódico.

Su expresión decimal es:

$$\sqrt{2} = 1{,}414243562$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050808$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236067977$$

A estos números se los llama Irracionales $\mathbb{I}$

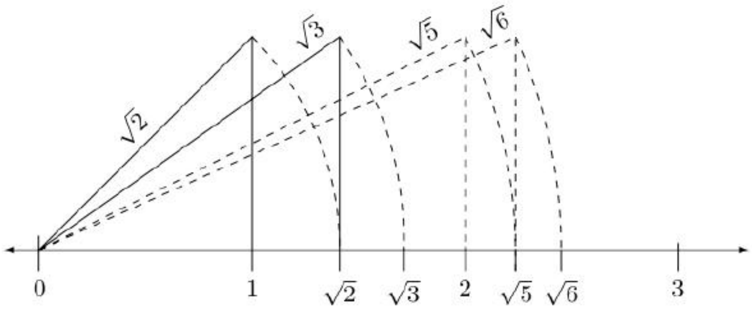
La raíz cuadrada de un número natural, si no es entera, es irracional: $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$

Además π es un número irracional que se utiliza para calcular la longitud de la circunferencia i el área del círculo.

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

Para ubicar los números racionales debemos utilizar el teorema de Pitágoras.

Se construye un triángulo cuyos lados tengan la unidad, así obtenemos $\sqrt{2}$ que es la hipotenusa del triángulo.



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$
$$x = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$x = \sqrt{2}$$

Para ubicar la $\sqrt{3}$ formamos un triángulo de lados $\sqrt{2}$ y 1, y por Pitágoras

$$y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$$
$$y = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}$$
$$y = \sqrt{2+1}$$
$$y = \sqrt{3}$$

Para tener en cuenta: todo número racional tiene un desarrollo decimal exacto o periódico, por lo tanto la representación decimal termina o se repite. Todo número irracional tiene un desarrollo de infinitas cifras decimales no periódicas, por lo tanto la representación decimal nunca termina ni se repite.

Repasemos unas propiedades antes de concluir con la clasificación de los números

Propiedades de la potenciación y radicación

Teoría

Potenciación

- *Potencias de igual base*

$$a^n . a^m = a^{n+m} \wedge \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- *Distributividad*

$$(a . b)^n = a^n . b^n \wedge \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- *Potencia de otra potencia*

$$\left(a^n\right)^m = a^{n . m}$$

- *Exponente negativo*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \wedge \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Radicación

- *Exponente fraccionario*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- *Distributividad*

$$\sqrt[n]{a . b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} \wedge \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- *Raíz de otra raíz*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n . m]{a}$$

- *Simplificación de índices*

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n . b]{a^{m . b}}$$

Ejercitación

17 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $m . m = 2m$ ☐

b) $\sqrt[3]{a^4} = a^{\frac{3}{4}}$ ☐

c) $s . s . s = s^3$ ☐

d) $\sqrt{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[5]{b}$ ☐

e) $\left(t . t^5\right)^2 = t^{12}$ ☐

f) $\frac{a^{-1}}{b} = \frac{b}{a}$ ☐

g) $\sqrt[6]{y^3} = y^{\frac{1}{2}}$ ☐

h) $3x^2 = 9x^2$ ☐

i) $\sqrt[3]{r} . \sqrt[3]{r} . \sqrt[3]{r} = r$ ☐

18 **Unir las operaciones con igual resultado.**

a) $(2 . 2)^2$

d) $\left(2^4\right)^3 : 2^{10}$

b) $\sqrt{8} : \sqrt{2}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

c) $2^5 : 2^3 . 2$

f) $2 : 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{2^8}$

$\sqrt{\sqrt{2^{12}}}$

$\sqrt{2^6} . \sqrt{2^4}$

$\sqrt{10} : \sqrt{5}$

$\sqrt{2} . \sqrt{2}$

$\sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{2^5} . \sqrt[3]{2}$

19 Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la potenciación.

a) $\dfrac{(r^3 . r)^2 . x^7}{(r^2)^4 . r^6}$

b) $\dfrac{(a^3 . b^4)^5 . a^2}{(a^5 . b^7)^3}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{p^3}}{p^2 . \sqrt{p}}$

d) $\sqrt{\dfrac{s^5}{\sqrt{s^3}}}$

20 Hallar la mínima expresión aplicando las propiedades de la radicación.

a) $\sqrt{m^5} . \sqrt{m} . \sqrt{m^6}$

b) $\sqrt[4]{r^3 . w^7} . \sqrt[4]{r^5 . w^5}$

c) $\sqrt[10]{\dfrac{a^{15}}{b^{25}}}$

d) $\sqrt[10]{n^2} . \sqrt[15]{n^6} . \sqrt[20]{n^{12}}$

21 Resolver aplicando propiedades.

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-7} . \left(\dfrac{3}{4}\right)^5 - \dfrac{\sqrt{5} . \sqrt{5}}{3} - \dfrac{(3^3)^3}{3^{11}} =$

b) $\dfrac{2^5}{2^8} + 2^{-3} + \left(\sqrt{\sqrt{2^8}}\right)^{-1} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} =$

c) $\dfrac{\sqrt{8} . \sqrt{10}}{\sqrt{5}} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} + \sqrt{\sqrt[3]{7^{12}}} =$

d) $\dfrac{3^{18}}{9^{10}} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{729}} - 3^{-3} =$

Para pensar y resolver

22 Factorizar el radicando y hallar el valor de cada raíz aplicando propiedades.

a) $\sqrt{2916}$

b) $\sqrt[3]{5832}$

c) $\sqrt[4]{20736}$

Los números reales

Teoría

El conjunto de los números **reales** (R) está formado por los números **racionales** (Q) y los números **irracionales**.

- Un número es **racional** cuando puede ser expresado como el cociente entre dos números enteros, es decir, todas las fracciones son números racionales. También lo son las expresiones decimales finitas o las infinitas periódicas.

a) $0{,}75 = \frac{3}{4}$ b) $0{,}2222... = 0{,}\widehat{2} = \frac{2}{9}$ c) $0{,}7555... = 0{,}7\widehat{5} = \frac{75-7}{90} = \frac{68}{90} = \frac{34}{45}$

- Un número es **irracional** cuando tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Todas las raíces no exactas son números irracionales.

a) $0{,}1234567891011....$ b) $\sqrt{5} = 2{,}236067978.....$ c) $\sqrt[3]{6} = 1{,}817120593...$

Ejercitación

1 **Colocar R (racional) o I (irracional) según corresponda.**

a) $\sqrt{20+5}$ ☐ e) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{6}$ ☐ i) $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}$ ☐

b) $\sqrt{12-4}$ ☐ f) $\sqrt{5}-\sqrt{5}$ ☐ j) $\sqrt{20}\,.\,\sqrt{5}$ ☐

c) $\sqrt{6-2}$ ☐ g) $\sqrt{8}+\sqrt{8}$ ☐ k) $0{,}\widehat{2}+\sqrt{36}$ ☐

d) $\sqrt{8}:\sqrt{2}$ ☐ h) $\sqrt{7}:\sqrt{7}$ ☐ l) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ☐

El conjunto formado por los números racionales y los irracionales se llama conjunto de los números reales y se lo designa con $\mathbb{R}$.

El conjunto de los números reales

- ✓ Es un conjunto infinito, no tiene ni primero ni último elemento.
- ✓ Es un conjunto totalmente ordenado, dados dos números reales distintos, siempre se puede establecer entre ellos una relación de menor a mayor.
- ✓ Los números reales completan la recta, esto significa que a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica y a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Sintetizando:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales } \mathbb{N}\\ \text{Cero}\\ \text{N° Negativos}\end{array}\right\}\text{Enteros } \mathbb{Z}\\ \text{Fraccionarios}\end{array}\right\}\text{Racionales } \mathbb{Q}\\ \text{Irracionales } \mathbb{I}\end{array}\right\}\text{Reales } \mathbb{R}$$

Actividad 1

1) Escriban 3 números racionales comprendidos entre -4 y -1.

2) Escriban 3 números irracionales comprendidos entre 1 y 3.

3) Ubiquen, aproximadamente, en la recta numérica los siguientes números reales:

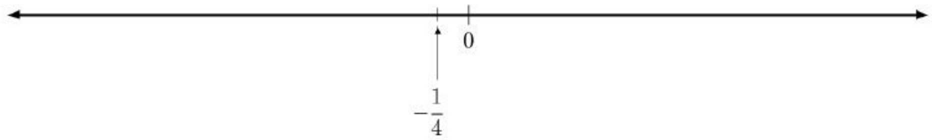
$\sqrt{5}$; $\frac{7}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $3{,}75$; -6 ; $-1{,}25$; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{3}$

4) Dados los números 5,2 ; $-6{,}3$; $-0{,}\hat{2}$; 3 ; $\sqrt{10}$ indiquen:

a) los números enteros que no son naturales.
b) los números racionales que no son enteros.
c) los números reales que no son racionales.
d) los números reales que no son irracionales.

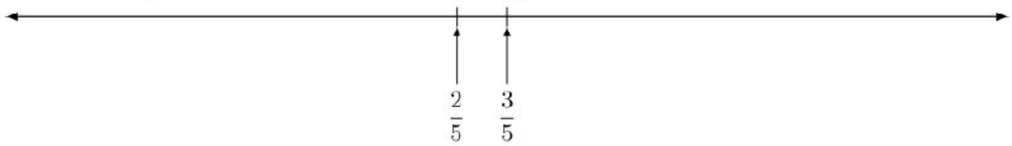
5) Ubiquen en la recta numérica los puntos a, b y c:

a)

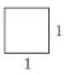


$a = -\frac{5}{4}$ $b = \frac{1}{2}$ $c = 2{,}5$

b)



$a = 0$ $b = -1$ $c = -0{,}4$

6) Dado el siguiente cuadrado, 

calculen su diagonal.

7) Calculen la diagonal de los cuadrados cuyos lados miden 4 cm. ; otro de 5 cm. y otro más de 9 cm. ¿Las diagonales obtenidas son números racionales o irracionales?

8) Completen con una cruz a qué campo numérico pertenecen los números indicados:

	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$-\sqrt{25}$	$\frac{5}{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{147}$	$\sqrt{1{,}44}$	$-\frac{18}{5}$	$\sqrt{28}$	0
$\mathbb{N}$											
$\mathbb{Z}$											
$\mathbb{Q}$											
$\mathbb{I}$											
$\mathbb{R}$											

9) Resolver las siguientes ecuaciones

$a)\ 2(x-3)+1=7-(5-3x)$

$b)\ \sqrt{2}\,x+6=\sqrt{8}$

$c)\ \frac{3}{5}=\frac{x}{2}+\frac{1}{10}$

$d)\ \frac{2}{3}\left(3x-\frac{7}{2}\right)=(x+1):\frac{6}{14}$

$e)\ 3+4x=9x+11$

$f)\ 4x^2+36=80$

$g)\ (0{,}125)^{-1}=x^3$

$h)\ 17-\sqrt{x^2-20}=6$

$i)\ \frac{2}{5}x-4=-8-x$

$j)\ 1-(2-x):3=9x-1$

$k)\ -12x^2=6-\sqrt{144}$

$l)\ x-\sqrt{12}=2(10x-\sqrt{3})$

$m)\ 9+x^2=36$

$n)\ 2-x=3+x$

$ñ)\ 2x+1=x+7$

Inecuaciones lineales

Teoría

Resolver una inecuación es encontrar el intervalo real de valores que la verifican y se utilizan los mismos procedimientos que para resolver una ecuación, salvo en el caso en que se multiplique o divida a ambos miembros por un número negativo, en cuyo caso se invierte el sentido de la desigualdad.

a)
$3x+1<5x+7$
$3x-5x<7-1$
$-2x<6$
$x>6:(-2)$
$x>-3$
$S=(-3\,;+\infty)$

b)
$2x+1\geq 5x-11$
$2x-5x\geq -11-1$
$-3x\geq -12$
$x\leq -12:(-3)$
$x\leq 4$
$S=(-\infty\,;4]$

c)
$\frac{4x+1}{-3}>1-2x$
$4x+1<(1-2x)\,.\,(-3)$
$4x+1<-3+6x$
$4x-6x>-3-1$
$-2x>-4$
$x<-4:(-2)$
$x<2$
$S=(-\infty\,;2)$

Ejercitación

30 Resolver las siguientes inecuaciones.

a) $2x-7\geq 5x+8$

d) $0{,}8(2x-5)-0{,}6x>3x-10$

g) $1-\frac{x+2}{5}\geq 0{,}4x-3$

b) $-7x+15<2(x-6)$

e) $1-4(x+3)<x+9$

h) $(2-3x):(-2)\leq\frac{3x+1}{5}$

c) $3(x+2)-1\leq 7x-3$

f) $\frac{3x-5}{2}>3x+8$

i) $\frac{3x-4}{2}+\frac{2x-3}{4}>x-1$

Intervalos

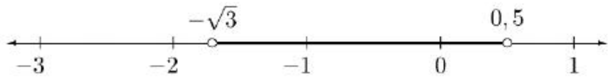
Un intervalo es la representación de un subconjunto de números reales. Para ello se utilizan los corchetes [ ] y los paréntesis( ), que indican si los extremos del intervalo están o no contenidos en el intervalo.

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados, semiabiertos y al infinito. Es muy importante visualizarlos a través de la representación en la recta numérica.

Intervalo abierto a,b

El intervalo abierto a,b, que se simboliza $(a\,;b)$, contiene todos los números reales entre a y b, sin incluirlos, es decir, los que verifican la inecuación $a < x < b$.

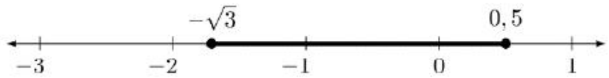
$\left(-\sqrt{3}\,;0{,}5\right)$ → contiene a todos los números reales x que cumplen que $-\sqrt{3} < x < 0{,}5$



Intervalo cerrado a,b

El intervalo cerrado a,b, que se simboliza $[a\,;b]$, contiene todos los números reales entre a y b, y a los propios a y b, es decir, los que verifican la inecuación $a \leq x \leq b$.

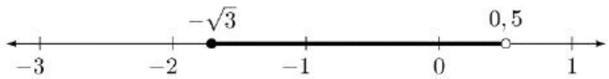
$\left[-\sqrt{3}\,;0{,}5\right]$ → contiene a todos los números reales x que cumplen que $-\sqrt{3} \leq x \leq 0{,}5$.



Otros intervalos de extremos a y b.

Algunos intervalos contienen solo uno de sus extremos.

$\left[-\sqrt{3}\,;0{,}5\right)$ → incluye a $-\sqrt{3}$, pero no a $0{,}5$ → $-\sqrt{3} \leq x < 0{,}5$

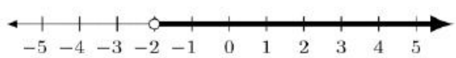


$\left(-\sqrt{3}\,;0{,}5\right]$ → incluye a $0{,}5$, pero no a $-\sqrt{3}$ → $-\sqrt{3} < x < 0{,}5$

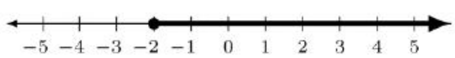
Intervalos al infinito

Algunos intervalos solo tienen un extremo. Para indicar que continúa, se usa el símbolo del infinito: ∞

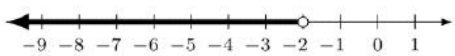
$(-2\,;\ \infty) \to x > -2$



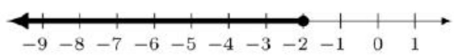
$[-2\,;\ \infty) \to x \geq 2$



$(-\infty\,;\ -2) \to x < -2$



$(-\infty\,;\ -2] \to x \leq 2$



Actividad 2

1) Escribí el intervalo que corresponde a cada inecuación y representa en la recta numérica.

$a)\ 0 \leq x < 3$ $b) -2,4 < x < -1,2$ $c) -\sqrt{5} < x \leq 2,2$

$d) -1,5 \leq x \leq -0,5$ $e)\ 1,1 \leq x < \sqrt[3]{7}$

En la recta numérica se indica con un punto lleno que el extremo está en el intervalo, y con uno vacío, que no está.

2) Escribí la inecuación que corresponde a cada intervalo y representa en la recta numérica.

$a)\ [1\ ;2,5)$ $b)\ (-2,3\ ;0]$ $c)\ \left(-0,5\ ;\sqrt{2,5}\right)$

$d)\ (-1\ ;5,1]$ $e)\ \left[\sqrt{3,6};\ -2,5\right]$

3) a) Escribí dos números racionales y dos irracionales del intervalo $(-1\ ;\ -0,9)$.
b) ¿Cuántos números enteros hay en ese intervalo?
c) ¿Y en el intervalo $[-1\ ;\ -0,9]$ cuántos enteros hay?
d) Escribí otro intervalo de extremos -1 y -0,9 que contengan algún número entero.

4) Escribí la inecuación que corresponde a cada intervalo y representá en la recta numérica.

$a)\ (-0,5\ ;\ \infty)$ $b)\ (-\infty\ ;5,1]$

$c)\ (-\infty\ ;2,2)$ $d)\ [-3\ ;\ \infty)$

Actividad 3

Resolvé las inecuaciones, escribí el intervalo que corresponda a la solución y representá en la recta numérica.

$a)\ 1-3x < 4$ $b) -2x+5 > x-4$ $c)\ 9-x \leq 4x+3$

$d) -2(x-5) \geq -3x+2$ $e) -x+\sqrt{3} \leq -2x-(x-1)$ $f)\ 4(x+2) > (x-1) : 0,5$

$g)\ 5(2x+3) < (2x+1)-4x$ $h)\ 2(x-1) \geq 3(x+2)$ $i)\ 20 > 5x+0,25$

$j)\ 2+\sqrt{8} \geq \sqrt{2}\,x+2\,\sqrt{2}$ $k)\ \dfrac{2}{3}-0,75\,x > x+1$ $l)\ \sqrt[3]{5}\,x-3 < 6\left(\dfrac{1}{4}x-0,8\hat{3}\right)$

Números Complejos ($\mathbb{C}$)

Resolvamos la ecuación $-2x^2 = 50$

$$\begin{aligned} -2x^2 &= 50 \\ x^2 &= 50 : (-2) \\ x &= \sqrt{-25} \end{aligned}$$

La respuesta $x = \sqrt{-25}$ no tiene solución en el conjunto de los números reales, ya que no hay ningún valor de x (número real) que elevado al cuadrado sea igual a -25.

Para resolver este tipo de ecuaciones se introduce un nuevo conjunto numérico llamado **conjunto de los números complejos.**

En este conjunto numérico se utiliza la letra "i" para sustituir a $\sqrt{-1}$.

Entonces $i = \sqrt{-1}$

La letra i es la parte imaginaria de un número complejo, por ejemplo:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i \longrightarrow unidad\ imaginaria$$

Entonces, la ecuación $-2x^2 = 50$ no tiene solución dentro de los números reales $\mathbb{R}$, pero sí, dentro del conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

$$x = \sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1} = 5i$$

La radicación de base negativa e índice par no tiene solución en el conjunto de los números reales ($\sqrt{-4}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt[4]{-16}$; etc.), ya que no existe ningún número real que elevado a una potencia par dé por resultado un número negativo.

Se define entonces un nuevo número, llamado **i**, cuyo cuadrado es igual a **-1**. $\boxed{i^2 = -1}$

Dicho número es la **unidad imaginaria** en el conjunto de los **números complejos**. $\boxed{i = \sqrt{-1}}$

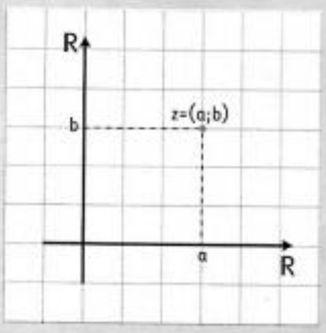
a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = \sqrt{4}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \pm 2i$ **b)** $\sqrt{-3} = \sqrt{3.(-1)} = \sqrt{3}\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = \pm \sqrt{3}i$

Representación gráfica y expresión cartesiana de un complejo

Se define al conjunto de los números complejos **C** como:

$$C = \{(x;y) \in R^2 / x \in R \wedge y \in R\}$$

A cada número complejo le corresponde un punto del plano.



$z = (a;b) \longrightarrow$ **Expresión Cartesiana**

Componente real ← a   b → *Componente imaginaria*

Todos los números de la forma **(a;0)** son números reales y los de la forma **(0;b)** son números imaginarios puros.

Un número real es un número complejo cuya segunda componente es igual a 0.

$$\mathbf{k = (k;0)}$$

El número imaginario de segunda componente igual a 1 es la **unidad imaginaria**.

$$\mathbf{i = (0;1)}$$

Expresión binómica de un complejo

Para multiplicar un número complejo por un escalar, se multiplica cada componente del complejo por el escalar.

$$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = a(1;0) + b(0;1) = \underbrace{a}_{\text{Parte real } R_e(z)} + \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria } I_m(z)} \longrightarrow \textbf{Expresión binómica}$$

a) $z_1 = (3;4) = 3 + 4i$

b) $z_2 = (0;3) = 3i$

c) $z_3 = (-1;1) = -1 + i$

d) $z_4 = (-2;0) = -2$

El conjunto de los números complejos (C)

VERIFICACIÓN 1

- **Unan con una flecha cada número complejo con su expresión binómica.**

1) $(-1;1)$

2) $(-1;0)$

3) $(1;-1)$

4) $(1;1)$

5) $(0;-1)$

a) $-i$

b) $1 + i$

c) $-1 - i$

d) -1

e) $1 - i$

f) $-1 + i$

APLICACIÓN 1

Ejercicio 1.1

- **Representen gráficamente cada uno de los siguientes números complejos.**

1) $z_1 = 2 + 3i$

2) $z_2 = i$

3) $z_3 = (5;0)$

4) $z_4 = -3 + 5i$

5) $z_5 = (-3;0)$

6) $z_6 = (0;-3)$

7) $z_7 = -5 - 2i$

8) $z_8 = 5 - 2i$

Ejercicio 1.2

• Hallen el valor de cada una de las siguientes raíces.

1) $\sqrt{-9} =$

2) $\sqrt{-25} =$

3) $\sqrt{-5} =$

4) $\sqrt{-8} =$

Ejercicio 1.3

• Hallen los valores reales de x e y que verifiquen las siguientes igualdades.

1) $(2x;y + 2) = (4;-1)$

2) $\left(-\frac{1}{2}x + 3;-y + \frac{1}{4}\right) = (0;1)$

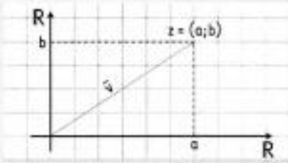
3) $3x - 1 + (1 - y)i = (2;3)$

4) $(2x - 5)i - 4y + 1 = 3 - i$

2 Módulo de un complejo. Complejos conjugados

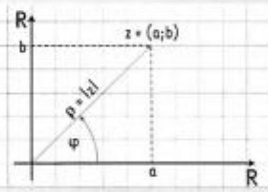
Módulo de un complejo

A cada número complejo $\mathbf{z} = \mathbf{(a;b)}$ le está asociado un vector $\vec{v}$, con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto $(a;b)$. De este modo se puede hacer corresponder a cada número complejo un vector.



El módulo de ese vector es el **módulo del complejo** y se representa con la letra ρ.

$$\boxed{\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



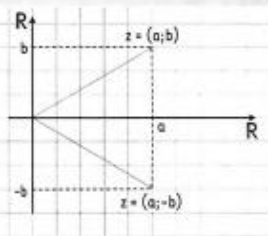
$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Al ángulo $\hat{\varphi}$ se lo llama **argumento**.

Complejos conjugados

Dado un complejo z, se define como su ***conjugado*** $\bar{z}$ *al complejo que tiene la misma parte real y opuesta su parte imaginaria.*

$$\boxed{z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi}$$



Un complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje x.

a) $z_1 = 5 - 2i \Rightarrow \bar{z}_1 = 5 + 2i$ **b)** $z_2 = -1 + i \Rightarrow \bar{z}_2 = -1 - i$ **c)** $z_3 = -7i \Rightarrow \bar{z}_3 = 7i$

- **Hallen el módulo y el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos.**

1) $z_1 = 12 + 5i$ **2)** $z_2 = 3 - i$ **3)** $z_3 = -4 - 2i$

Ejercicios de cierre

1) Calculen las siguientes raíces:

$a)\ \sqrt{-25}$ $b)\ \sqrt{-144}$ $c)\ -\sqrt{-36}$

$d)\ \sqrt{-100}$ $e)\ -\sqrt{-49}$ $f)\ \sqrt{-81}$

2) Resuelve las siguientes ecuaciones

$a)\ -4x^2 + 8 = 44$ $b)\ -x^2 = 16$ $c)\ 3x^2 + 30 = 4x^2 + 199$

$d)\ 32 - x^2 = 58$ $e)\ 5x^2 + 1 = 7x^2 + 14$ $f)\ -5x^2 + 100 = 15^2$

$g)\ x^2 + 3(x^2 - 4) = -1612$ $h)\ \sqrt{2}\,x^2 = \frac{3}{5} + 4x^2$ $i)\ 3x^2 - 5(x^2 + 1) = 2(x^2 + 3) - 10$

3) Completen el siguiente cuadro:

Número Complejo	Componente Real	Componente Imaginario
$-4 - 10i$		
$\sqrt{3} + i$		
$1 - i$		
$\frac{1}{2}i$		
$-\frac{1}{4} + 5i$		
-9		

4) Indiquen si cada una de las siguientes afirmaciones es correcta o incorrecta.

Todo número real es número complejo.

Todo número complejo es número real.

Todo número irracional es número complejo.

Todo entero se puede escribir en la forma $a + bi$.

Todo número complejo se puede expresar en forma de número irracional.

Todo entero negativo se puede expresar en forma de un número imaginario puro.

5) para cada uno de los números complejos del ejercicio 3, graficar y hallar

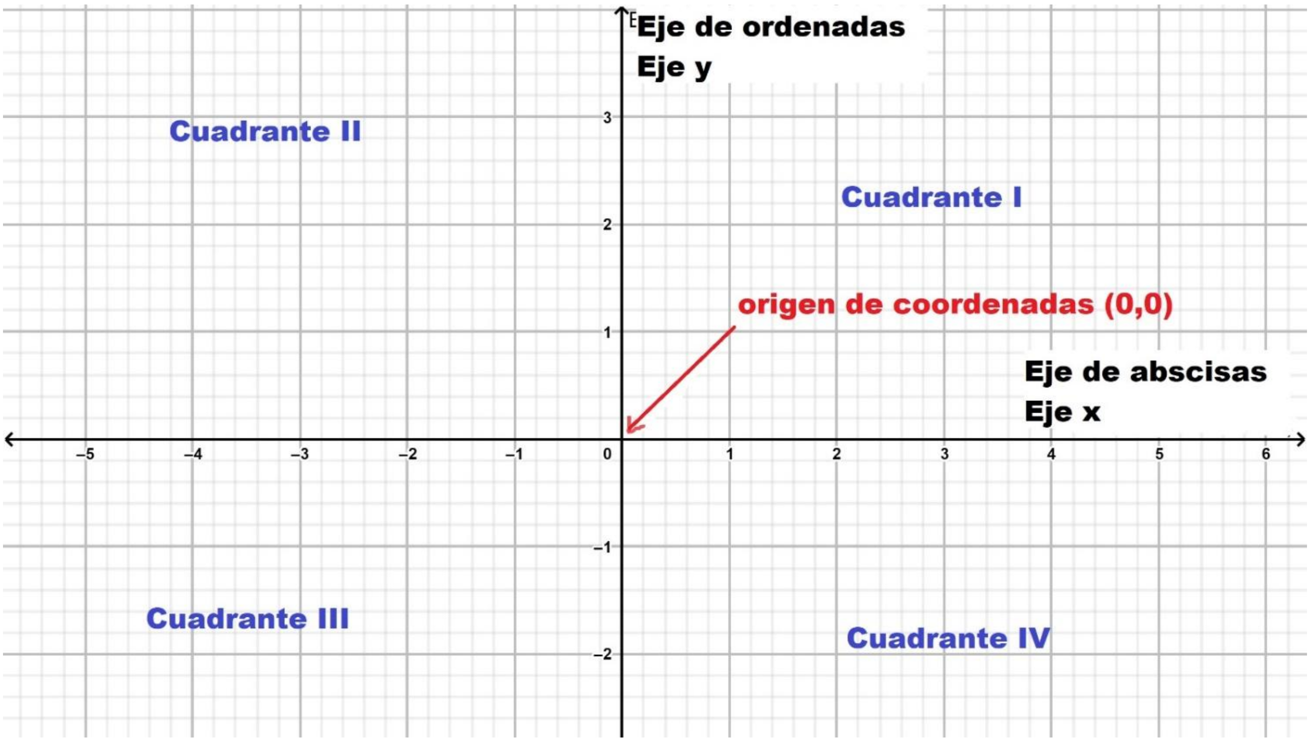
a) módulo
b) complejo conjugado

Unidad II: Sistema de ejes cartesianos

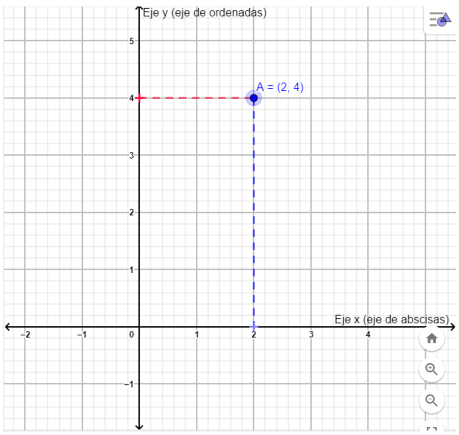
Antes de empezar el tema tendremos que ver cómo se ubican los puntos en el plano y aprender a interpretar gráficos. Por esto tenemos que ver algunos nuevos términos y cuestiones a tener en cuenta.

UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

Primero tengamos en cuenta que para representar punto en el plano vamos a considerar dos ejes ortogonales (perpendiculares). Ya saben cómo ubicar los números en la recta real, ahora a esa recta le agregamos otra recta perpendicular que la cruza por el punto 0. Ahora vemos en el gráfico que la recta real es la recta horizontal que la denominaremos “**eje x**” ó “**eje de abscisas**”, la recta perpendicular al eje x que trazamos por el 0 la denominaremos “**eje y**” ó “**eje de ordenadas**”. La intersección de ambas rectas, de ambos ejes, es en el punto **(0,0)** al cual llamaremos **origen de coordenadas**:



Para ubicar un punto en el plano es necesario usar dos referencias, cada una se llama **coordenada**.
La primera coordenada suele marcarse en el eje horizontal y se la denomina **coordenada x** ó **abscisas**. La otra coordenada es la **coordenada y** u **ordenada** y se marca en el eje vertical. La ubicación del par (a;b) está determinada por la intersección entre la ubicación a en el eje x y la ubicación b en el eje y.



Por ejemplo, si queremos marcar el punto **A=(2;4)**

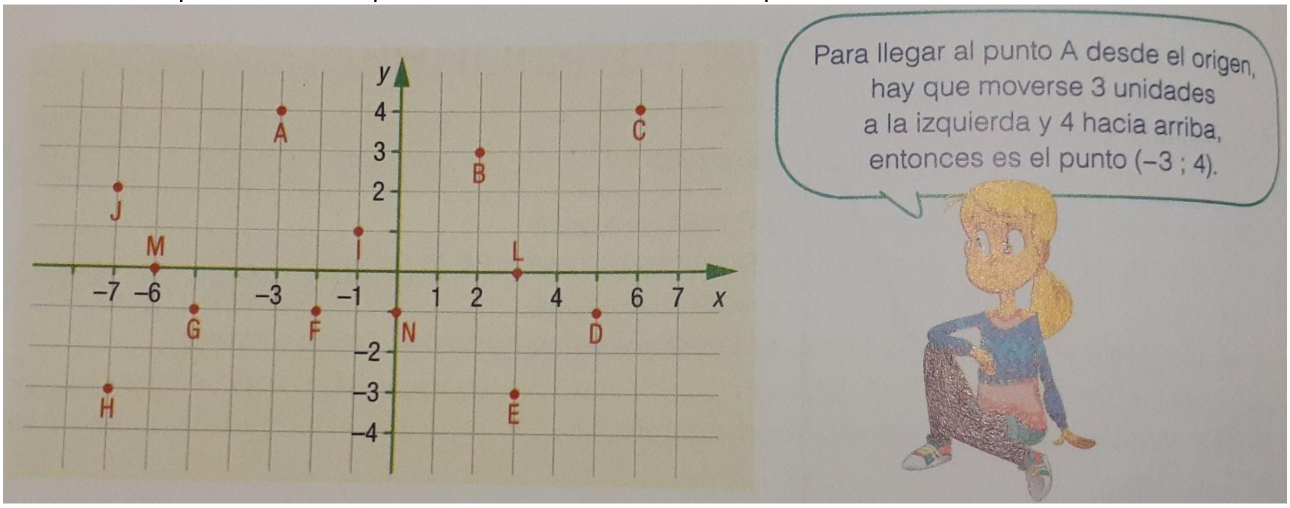
- nos fijamos sobre el eje x el valor 2, ahí marcamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 2 (azul), y luego
- sobre el eje y nos ubicamos sobre el valor 4, trazamos la línea de puntos perpendicular al eje que pasa por 4 (roja),
- por último, la intersección de esas líneas punteadas determinan el punto A!!

Por si aún no están claras lo del plano cartesiano y cómo se ubican los puntos, te sugiero que veas el video del Profesor Carreón: https://www.youtube.com/watch?v=kzOzYY-T-50 ó los videos del Profe Alex:

- https://www.youtube.com/watch?v=ftGVWXo1Khc (partes del plano cartesiano: abscisas, ordenadas, origen de coordenadas, cuadrantes, ubicación de puntos)
- www.youtube.com/watch?v=QTrE4x5DPZ8 (ubicación de puntos en el plano)
- www.youtube.com/watch?v=M-KzreZqXO0 (ubicación de puntos en el plano con fracciones)

Vamos a ponernos a prueba con las siguientes actividades!

Actividad 1: Lean lo que dice la chica para indicar las coordenadas del punto A



Ahora escriban los datos de los otros puntos en la siguiente tabla:

Punto	Abscisa	Ordenada	Coordenadas del punto	Cuadrante
A	-3	4	(-3;4)	II
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
L				
M				
N				

Actividad 2: Ubiquen los siguientes puntos en un sistema de ejes coordenados.

A=(-1;2) B=(4;-3) C=(0;1) D=(-3;0) E=(0;0) F=(-3;-5) G=(-2;4)

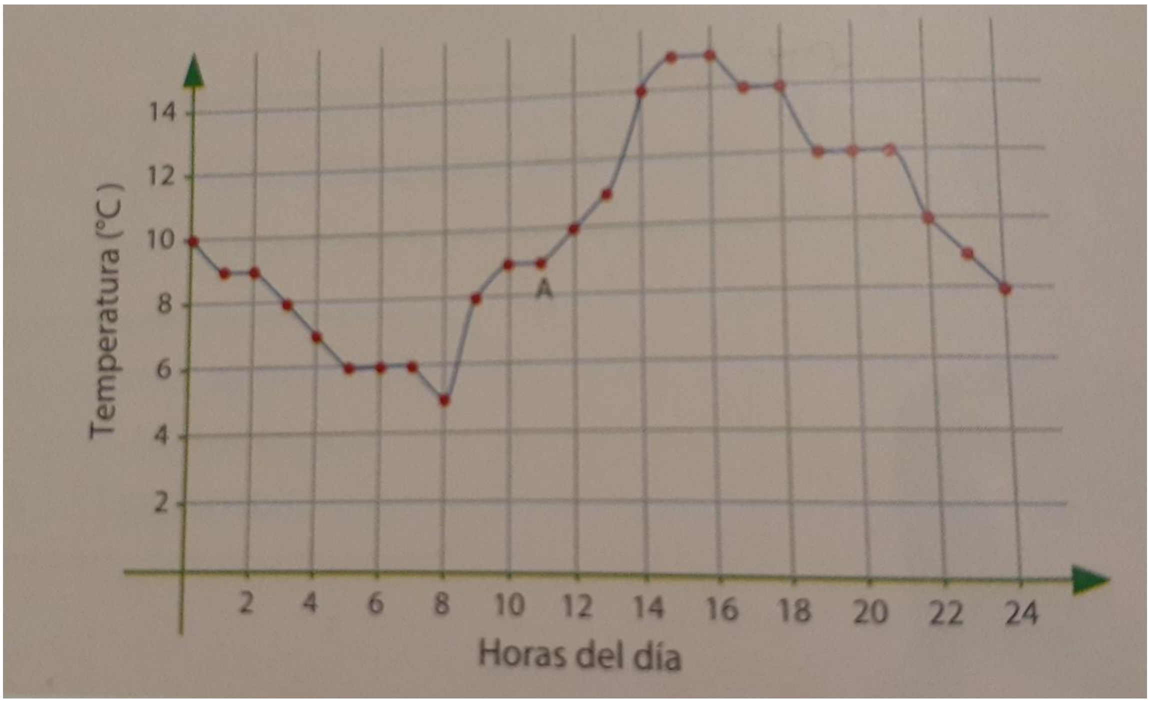
LECTURA DE GRÁFICOS

Para poder analizar qué quieren decir los puntos en un gráfico, deben observar qué se está representando en cada eje. Por ejemplo si en el eje horizontal se están graficando las horas del día y en el vertical la temperatura en grados centígrados, un punto (2,9) indica que a las 2 de la mañana hacía 9°C

Veamos dos ejemplos para analizar algunas cuestiones

Ejemplo 1:

El siguiente gráfico muestra las temperaturas que se registraron el 21 de junio de 2017

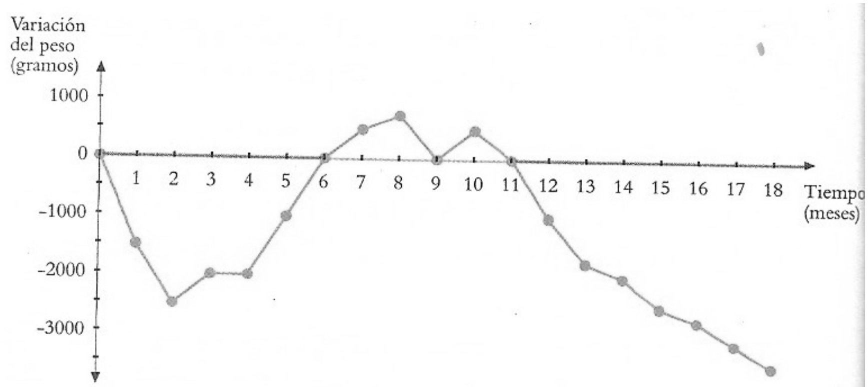


- ¿Qué información brinda el punto A de la gráfica? *El punto A indica que a las 11 hs se registraron 9°C*
- ¿Cuál fue la temperatura mínima de ese día? ¿A qué hora se produjo? *La temperatura mínima fue de 5°C y se produjo a las 8 hs*
- ¿A qué hora se registró la temperatura máxima? *No hubo una sola temperatura máxima ya que a las 15 hs y a las 16 hs se registraron 15°C*
- ¿En qué horarios la temperatura se mantuvo constante? *Desde la 1 hasta las 2 de la mañana, desde las 5 hs hasta las 7 hs inclusive, desde las 10 hs hasta las 11 hs, desde las 15 hs hasta las 16 hs, desde las 17 hs hasta las 18 hs y desde las 19 hs hasta las 21 hs.*
- ¿Qué temperatura hacía a las 6 de la tarde? *14°C*
- ¿En qué horas la temperatura fue de 14°C? *A las 14 hs, 17 hs y 18 hs*
- ¿En qué horas la temperatura superó los 12°C? *Los 12°C se superaros desde las 13:30 hs hasta casi las 19 hs.*
- ¿En qué horas la temperatura fue bajando? *Desde las 0 hasta la 1, desde las 2 hasta las 5, desde las 7 hasta las 8, desde las 16 hasta las 17, desde las 18 hasta las 19 y desde las 21 hasta las 24 hs.*

Ejemplo 2:

Una doctora nutricionista registra una vez al mes, en un gráfico cartesiano, la variación del peso en gramos de sus pacientes en función del tiempo.

El siguiente gráfico corresponde a la señora Juana, quien comenzó la dieta con 98kg y realiza su consulta con la doctora una vez por mes.

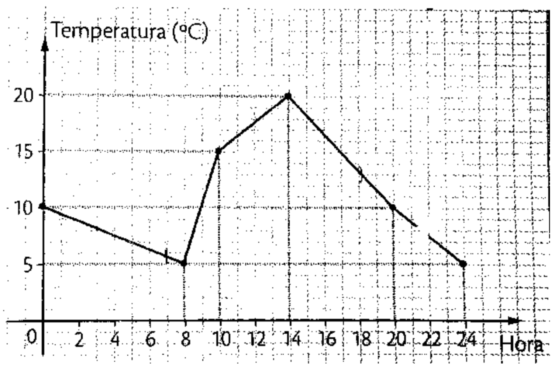


a) ¿Cuánto pesaba en la tercera consulta? *En la tercer consulta llevaba bajado 2000 grs=2 kg así que pesaba 96 kg.*
b) ¿Cuánto aumentó entre el cuarto y quinto mes? *Sólo aumentó 1 kg*
c) ¿En qué mes esta paciente alcanzó su menor peso? ¿Y el mayor? *El menor peso lo alcanzó a los 18 meses de haber empezado con la nutricionista, mientras que el mayor peso lo registró a los 8 meses de haber empezado*
d) ¿En qué períodos bajó de peso? *Desde que empezo hasta e 2do mes, entre el 8vo y 9no mes y desde el décimo mes hasta el mes 18.*
e) ¿En qué períodos subió de peso? *Entre el 2do y 3er mes, desde el 5to al 8vo mes, y entre el 9no y 10mo mes*

f) ¿Hubo algún momento en el que su peso no varió? *Entre el 3er y 4to mes su peso no varió*
g) ¿En qué meses la paciente volvió a pesar lo mismo que al comenzar el tratamiento? Pesó 98 kg en el 6to mes, en el 9no y en el decimoprimer mes.

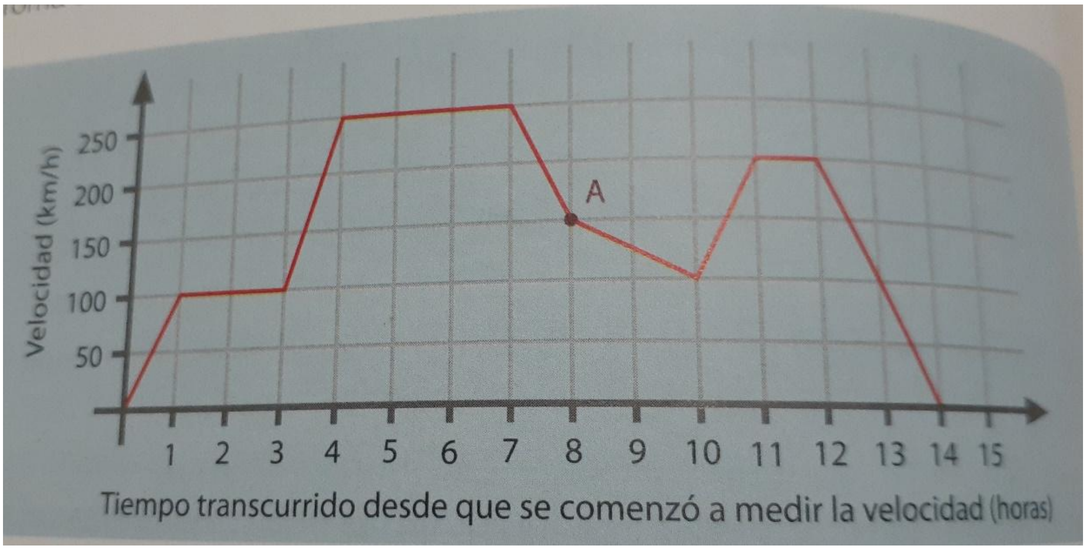
Ahora es tu turno de interpretar los gráficos así que te dejo varias actividades para pensar!!

Actividad 3: El siguiente gráfico muestra las distintas temperaturas que se registraron en Buenos Aires durante un día del año.



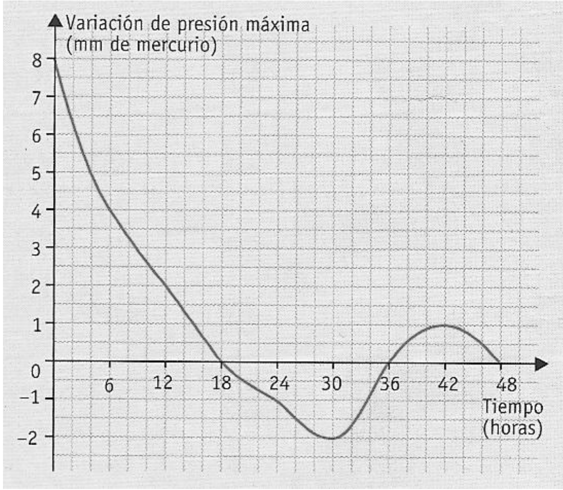
a) ¿Qué significa el punto (10;15)?
b) Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿La temperatura fue de 0°C en algún momento? ¿Por qué?
d) ¿Posee punto máximo? ¿Cuál? ¿en qué hora del día se registró?
e) Mencionar los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura fue mayor a 12°C

Actividad 4: Un ingeniero analiza la variación de la velocidad de un auto en un tiempo determinado. Toma ciertas medidas y arma este gráfico:



a) ¿Qué está representando en cada eje? ¿en qué unidades mide?
b) ¿Qué información da el punto A?
c) A las 5 hs de comenzar las mediciones, ¿cuál era la velocidad? ¿Cómo te das cuenta?
d) ¿En qué momento la velocidad fue de 200 km/h? ¿Cómo te das cuenta?
e) ¿En qué momentos la velocidad se mantiene constante? ¿Cómo te das cuenta?
f) ¿Cuál es la escala en el eje de las ordenadas? ¿Cuánto representa cada cuadradito?
g) ¿En qué momentos la velocidad fue de 0km/h? ¿Dónde te fijas?
h) ¿En qué momentos la velocidad aumenta?

Actividad 5: Un paciente entra en una sala de urgencias de un hospital para ser atendido por el aumento de su presión arterial. Durante un cierto tiempo se lo conecta a una máquina que le controla la presión continuamente y produce un gráfico. En él aparece representada la variación de la presión máxima del paciente, respecto de la considerada normal (12 mm de mercurio), a partir del momento de su internación.



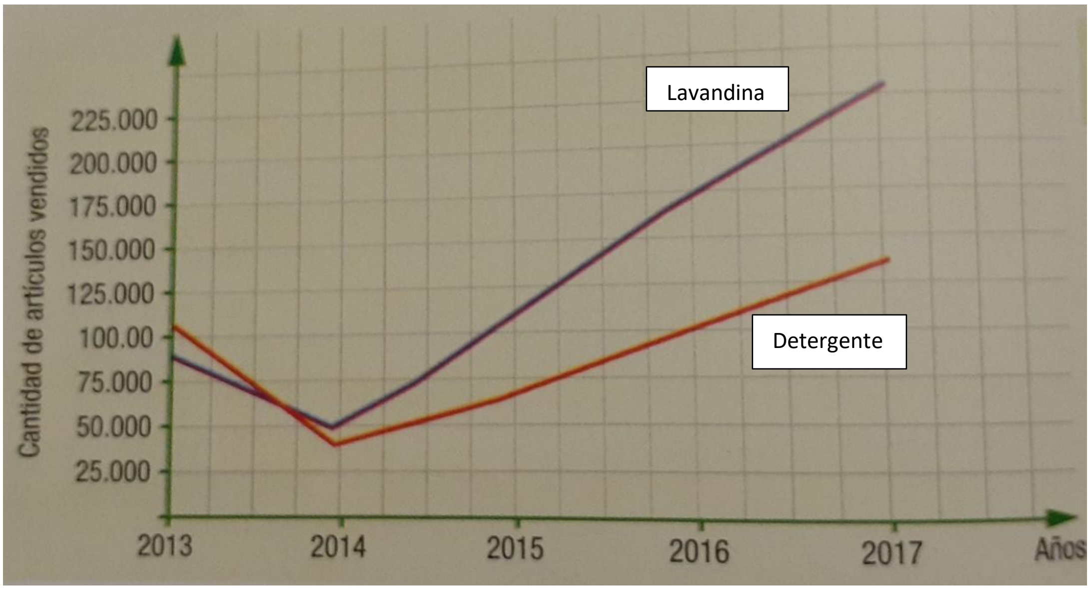
a) ¿Con qué presión máxima ingresó el paciente al hospital?
b) ¿Qué representan en este gráfico los valores negativos que figuran en el eje vertical?
c) ¿Tuvo presión máxima normal en algún momento durante su internación?
d) De acuerdo a lo que se observa en el gráfico, ¿durante cuánto tiempo estuvo este paciente en observación?

Actividad 6: La temperatura media registrada en el mes de agosto de 2017 en la ciudad de Magdalena fue de 6°C. Este gráfico muestra la variación respecto de esa temperatura durante el 6 de agosto de 2017

a) ¿Qué información da el punto A del gráfico?
b) ¿Cuál fue la temperatura a las 0 hs? ¿Y a las 10 hs?
c) ¿A qué hora la temperatura era de 6°C? ¿Y de 7°C? ¿y de 5°C? ¿Dónde observan estos datos en el gráfico? Explica con tus palabras.
d) ¿Cuáles fueron, ese día, la temperatura máxima y mínima? ¿En qué momento se registraron?
e) ¿En qué momentos del día la temperatura fue mayor a 4°C?
f) ¿En qué periodo del día subió la temperatura? ¿En qué períodos bajó? ¿en qué períodos se mantuvo constante?
g) ¿En qué período del día hubo temperaturas por debajo de 0°C?
h) Completar la tabla con las temperaturas que se registraron el 6 de agosto

Hora	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**
Temp (°C)													

Actividad 7: En una empresa de fabricación de artículos de limpieza analizan las ventas de lavandina y detergente en el período 2013-2017 (rojo: detergente; lila: lavandina)
a) ¿En qué período la venta de detergentes disminuyó?
b) ¿En qué año se produjo la menor venta de lavandina?
c) En el período 2015-2017, ¿el crecimiento de la venta de qué artículo fue mayor? ¿cómo te das cuenta?
d) En qué años la cantidad de artículos vendidos fue menor que 150.000?



Actividad 8: En una dietética venden harina integral a $52,50 el kilogramo

a) Completar la tabla

Cantidad de harina (kg)	**1**	**2**	**4**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**
Precio a Pagar (S)								

b) Representar los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos

c) ¿Tiene sentido unir los puntos graficados? Explicá cómo lo pensaste

d) Escribí la cuenta que pueden hacer para calcular el precio que hay que pagar si concoes la cantidad de kilogramos que se compran

e) ¿Cuántos kilogramos de harina pueden comprar con $1155? ¿y con $624,75? ¿Por qué?

Actividad 9: En un laboratorio ponen a calentar un líquido que hierve a los 120°C. La fórmula que permite calcular la temperatura del líquido hasta que hierva es $T(h) = 5h + 15$, dónde h son los minutos desde que empezó la medición

a) Completar la tabla

Tiempo (minutos)	**0**	**2**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**
Temperatura (°C)								

b) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos

c) ¿Cómo expresarías, con tus palabras, la forma de calcular la temperatura del líquido en cualquier momento?

Actividad 10: Juan sale de su casa en auto a las 8 de la mañana a una velocidad de 60 km/h.

a) Completar la tabla

Tiempo de viaje (horas)	**2**	**3**	**5**	**6**	**10**
Distancia recorrida (km)					

b) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular la distancia recorrida si conocen las horas de viaje

c) Escribir la cuenta que hay que hacer para calcular las horas de viaje si conocen la distancia recorrida

d) Marcar los puntos en un sistema de ejes cartesianos

e) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

Razones y proporciones aritméticas

Teoría

Una **razón** es la expresión del cociente entre dos números reales: $r = \frac{a}{b} \wedge a \in \Re \wedge b \in \Re - \{0\}$

a) $\frac{0,2}{5} = 0,04$ b) $\frac{-7,5}{3} = -2,5$ c) $\frac{\frac{2}{5}}{-4} = -0,1$ d) $\frac{-1,4}{-\frac{7}{2}} = 0,4$

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

- Si los números a, b, c y d son distintos, la proporción es **ordinaria** y cada uno de ellos se denomina **extremo**.

a) $\frac{5}{1,2} = \frac{25}{6} \Leftrightarrow \underbrace{1,2 \,.\, 25}_{30} = \underbrace{5 \,.\, 6}_{30}$ b) $\frac{-0,5}{0,8} = \frac{-2}{3,2} \Leftrightarrow \underbrace{0,8 \,.\, (-2)}_{-1,6} = \underbrace{-0,5 \,.\, 3,2}_{-1,6}$

- Si hay dos extremos iguales, se denominan **medios** y la proporción es **continua.**

a) $\frac{4,5}{3} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underbrace{3 \,.\, 3}_{9} = \underbrace{4,5 \,.\, 2}_{9}$ b) $\frac{-1,5}{9} = \frac{0,25}{-1,5} \Leftrightarrow \underbrace{-1,5 \,.\, (-1,5)}_{2,25} = \underbrace{9 \,.\, 0,25}_{2,25}$

1 Unir las razones iguales.

a) $\frac{0,7}{5}$ d) $\frac{-2,4}{-\frac{3}{25}}$ g) $\frac{\frac{3}{4}}{-1,25}$

b) $\frac{\frac{7}{3}}{-2,\hat{3}}$ e) $\frac{-0,4}{-\frac{1}{5}}$

c) $\frac{-3}{1,5}$ f) $\frac{0,\hat{5}}{0,\hat{2}}$

$\frac{-0,32}{\frac{8}{25}}$ $\frac{0,9}{-\frac{3}{2}}$ $\frac{-\frac{4}{3}}{-0,\hat{6}}$

$\frac{\frac{5}{6}}{-0,2}$ $\frac{-\frac{4}{3}}{-0,5\hat{3}}$ $\frac{0,0\hat{3}}{\frac{5}{21}}$

$\frac{\frac{2}{5}}{0,02}$ $\frac{-0,75}{\frac{3}{8}}$

2 Colocar = o ≠ según corresponda en cada caso.

a) $\frac{0,2}{5} \square \frac{0,8}{20}$ c) $\frac{-0,3}{-\frac{1}{2}} \square \frac{6}{-10}$ e) $\frac{1}{-\sqrt{2}} \square \frac{\sqrt{8}}{-4}$

b) $\frac{-3}{\frac{3}{5}} \square \frac{-5}{0,1}$ d) $\frac{-\frac{5}{2}}{3} \square \frac{13,\hat{3}}{-8}$ f) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \square \frac{-\sqrt{50}}{-\sqrt{5}}$

3 Hallar el valor de x en cada una de las siguientes razones.

a) $\frac{x}{1,2} = 5 \Rightarrow x =$ c) $\frac{x+1}{-\frac{3}{5}} = 2 \Rightarrow x =$ e) $\frac{2x+1}{0,7} = -3 \Rightarrow x =$

b) $\frac{0,3}{x} = -0,12 \Rightarrow x =$ d) $\frac{-\frac{1}{2}}{x-1} = -0,2 \Rightarrow x =$ f) $\frac{-\frac{3}{2}}{3x-2} = 0,5 \Rightarrow x =$

Cálculo de los extremos

Teoría

Para calcular el **extremo** de una proporción **ordinaria** se aplica la propiedad fundamental de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a.d = b.c \Rightarrow a = \frac{b.c}{d}$$

a) $\frac{x}{1{,}2} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1{,}2\,.\,3}{5} \Rightarrow x = 0{,}72$

b) $\frac{8}{x-3} = \frac{-5}{2} \Rightarrow x - 3 = \frac{8\,.\,2}{-5} \Rightarrow x - 3 = -3{,}2 \Rightarrow x = -3{,}2 + 3 \Rightarrow x = -0{,}2$

c) $\frac{2x+1}{3} = \frac{x-2}{5} \Rightarrow (2x+1)\,.\,5 = 3\,.\,(x-2) \Rightarrow 10x + 5 = 3x - 6 \Rightarrow 10x - 3x = -6 - 5 \Rightarrow 7x = -11 \Rightarrow x = -\frac{11}{7}$

4 Completar la tabla de manera que se verifique que $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$.

x	y	z	w
	0,1	3	5
		$\frac{2}{3}$	0,5
0,8	$-\frac{2}{5}$		-4
0,75	$-0{,}2$	$-\frac{5}{4}$	
	$-\frac{3}{10}$	$-0{,}\hat{5}$	$-\frac{2}{3}$
$\sqrt{6}$		$\sqrt{15}$	$\sqrt{10}$

5 Hallar el valor de x en las siguientes proporciones.

a) $\frac{x+2}{0{,}8} = \frac{-5}{0{,}2}$

c) $\frac{-\frac{8}{7}}{1{,}5} = \frac{3x+1}{10{,}5}$

e) $\frac{2x-3}{-\frac{1}{3}} = \frac{3x}{0{,}5}$

g) $\frac{1{,}\hat{3}}{x-0{,}\hat{3}} = \frac{2}{6x+1}$

b) $\frac{0{,}\hat{2}}{x-3} = \frac{2}{-4{,}5}$

d) $\frac{0{,}25}{-\frac{3}{4}} = \frac{0{,}\hat{6}}{8-5x}$

f) $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{-2}{3}$

h) $\frac{x+1}{x-3} = \frac{x+2}{x-1}$

Para pensar y resolver

6 Armar una proporción continua con los números: 0,8; $0{,}\hat{6}$ y $0{,}\hat{5}$.

Cálculo de los medios

Teoría

Para calcular los **medios** de una proporción **continua** se aplican propiedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = a.c \Rightarrow |b| = \sqrt{a.c}$$

a) $\frac{3}{x} = \frac{x}{12} \Rightarrow x^2 = 3.12 \Rightarrow |x| = \sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

b) $\frac{x+2}{6} = \frac{24}{x+2} \Rightarrow (x+2)^2 = 6.24 \Rightarrow |x+2| = \sqrt{144} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 12 & \Rightarrow x_1 = 10 \\ x+2 = -12 & \Rightarrow x_2 = -14 \end{cases}$

7 **Unir cada proporción continua con el valor de sus medios.**

a) $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$

d) $\frac{10}{x} = \frac{x}{5}$

b) $\frac{5}{x} = \frac{x}{20}$

e) $\frac{x}{6} = \frac{2}{x}$

c) $\frac{x}{2} = \frac{1}{x}$

f) $\frac{3}{x} = \frac{x}{15}$

$x = \pm 2\sqrt{3}$ $x = \pm 5\sqrt{2}$ $x = \pm 4$ $x = \pm 3\sqrt{5}$ $x = \pm 3\sqrt{2}$ $x = \pm 10$ $x = \pm \sqrt{2}$

8 **Hallar el valor de x en las siguientes proporciones continuas.**

a) $\frac{2x}{0{,}4} = \frac{1}{2x}$ b) $\frac{0{,}18}{x+1} = \frac{x+1}{2}$ c) $\frac{x-3}{28} = \frac{7}{x-3}$ d) $\frac{5}{2x+3} = \frac{2x+3}{45}$

Propiedades de las proporciones

Teoría

Las proporciones cumplen con las siguientes propiedades:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d} & \rightarrow \text{Ejemplo: } \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{3}{3+4} = \frac{6}{6+8} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{6}{14} \\ \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} & \rightarrow \text{Ejemplo: } \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{15-10}{10} = \frac{3-2}{2} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} & \rightarrow \text{Ejemplo: } \frac{4}{12} = \frac{2}{6} \Rightarrow \frac{4+12}{4-12} = \frac{2+6}{2-6} \Rightarrow \frac{16}{-8} = \frac{8}{-4} \end{cases}$$

En una serie de razones iguales se cumple que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = ... = \frac{g}{h} = \frac{a \pm c \pm e \pm ... \pm g}{b \pm d \pm f \pm ... \pm h}$

a) $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1+5+3+4}{2+10+6+8} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{30}{10} = \frac{21}{7} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1} = \frac{30-21-15-3}{10-7-5-1} = \frac{-9}{-3} = 3$

9 Hallar el valor de las incógnitas aplicando propiedades.

a) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \wedge x + y = 2$

b) $\frac{x}{y} = -3 \wedge x + y = \frac{1}{2}$

c) $\frac{x}{y} = 0,\widehat{5} \wedge x - y = -\frac{2}{3}$

d) $2x = 3y \wedge x + y = 1,\widehat{1}$

e) $\frac{x}{y} = \frac{z}{15} = \frac{2}{5} \wedge x + z = 10$

f) $5x - 2y = 0 \wedge y - x = 1$

10 Plantear, aplicar propiedades y hallar el par de números que cumplen las siguientes condiciones.

a) Su razón es dos tercios y su suma, veinticinco.

b) Su razón es tres y su diferencia, un tercio.

c) Su razón es dos tercios y la suma de sus cuadrados, cincuenta y dos.

d) Su razón es cinco medios y la diferencia de sus cuadrados, ochenta y cuatro.

11 Calcular el valor de x en las siguientes proporciones.

a) $\frac{x - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{0,5^2}{0,\widehat{2}}$

b) $\frac{2^{-2}}{x - 0,4} = \frac{-\frac{1}{5}}{-0,8 + 1}$

c) $\frac{x + 1}{2 - \frac{5}{4}} = \frac{3 . 5^{-2}}{x + 1}$

d) $\frac{0,9 - 1}{6(x - 1)} = \frac{2^{-3}}{5(x + 2)}$

e) $\frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^{-2}}{3x - 1} = \frac{3x - 1}{0,\widehat{1}}$

f) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}{x + 2} = \frac{x - 2}{0,25 \cdot \left(-0,\widehat{3}\right)^{-3}}$

Para pensar y resolver

12 Aplicar propiedades y hallar el valor de de x e y.

$\frac{x}{y} = \frac{10}{9} \wedge 3x - 2y = 2$

Tarea para el hogar

13 **Unir cada razón con su valor.**

a) $\dfrac{-0{,}2+1}{\frac{12}{5}}$

b) $\dfrac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{5}{6}}$

c) $\dfrac{-0{,}2^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{8}-0{,}5^2}{\frac{3}{4}}$

e) $\dfrac{1-1{,}\hat{5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$

f) $\dfrac{\frac{1}{2}+2^{-2}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}}$

-10^{-1}

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$3^{-1}-\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3}-0{,}\hat{5}$

$\frac{5}{6}-1$

$-2+\frac{3}{4}$

$-\frac{2}{3}+1$

14 **Hallar el valor de la incógnita.**

a) $\dfrac{r+\frac{1}{2}}{0{,}\hat{5}}=0{,}6 \Rightarrow r=$

c) $\dfrac{-\frac{5}{12}}{3{,}\hat{3}}=1-t \Rightarrow t=$

e) $\dfrac{z+\frac{2}{3}}{0{,}\hat{2}-z}=-3 \Rightarrow z=$

b) $\dfrac{0{,}8}{m-\frac{3}{4}}=-2 \Rightarrow m=$

d) $\dfrac{3n+1}{-\frac{1}{2}}=4n+6 \Rightarrow n=$

f) $\dfrac{(s+1)^2}{s-1}=s+5 \Rightarrow s=$

15 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $\dfrac{-3}{0{,}5}=\dfrac{-6}{\frac{1}{10}}$ $\square$

b) $\dfrac{-\frac{1}{2}}{0{,}3}=\dfrac{-5}{3}$ $\square$

c) $\dfrac{0{,}1}{-0{,}8}=\dfrac{-\frac{1}{8}}{0{,}1}$ $\square$

d) $\dfrac{-0{,}\hat{2}}{-\frac{4}{3}}=\dfrac{-1}{-6}$ $\square$

16 **Completar con el número que verifique las siguientes proporciones.**

a) $\dfrac{-\frac{3}{5}}{\square}=\dfrac{0{,}1}{\frac{2}{9}}$

c) $\dfrac{0{,}\hat{7}}{-0{,}8\hat{3}}=\dfrac{\square}{-\frac{3}{14}}$

e) $\dfrac{\square}{-\frac{3}{7}}=\dfrac{1{,}\hat{5}}{0{,}\hat{3}}$

b) $\dfrac{\square}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{12}}{-\frac{9}{4}}$

d) $\dfrac{-0{,}75}{-\frac{1}{4}}=\dfrac{-0{,}25}{\square}$

f) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\square}{-\sqrt{24}}$

17 **Plantear, aplicar propiedades y hallar los tres números que cumplen con las siguientes condiciones:**

- Su suma es igual a 23.
- La razón entre uno de ellos y $\frac{15}{2}$ es $\frac{6}{5}$.
- La razón de los otros dos es $\frac{2}{5}$.

18 **Hallar el valor de las incógnitas aplicando propiedades.**

a) $\frac{x}{y} = -2 \wedge x + y = \frac{2}{3}$

b) $\frac{x}{y} = 0,1\widehat{6} \wedge x + y = -0,7$

c) $\frac{x}{y} = -0,3 \wedge x - y = 1,7\widehat{3}$

d) $3x + 7y = 0 \wedge x - y = 3$

e) $\frac{x}{y} = \frac{x+2}{z} = \frac{2}{3} \wedge x + y = 10$

f) $\frac{x}{y} = \frac{x+1}{z} = \frac{1}{2} \wedge y + z = 14$

19 **Calcular el valor de x en las siguientes proporciones.**

a) $\frac{3x-2}{0,\widehat{2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{0,25}$

b) $\frac{\sqrt{0,25}}{3^{-1}} = \frac{-1,2}{2x-1}$

c) $\frac{\sqrt{5}+1}{x+2} = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$

d) $\frac{x}{\left(-1 + \frac{1}{5}\right)^{-1}} = \frac{0,\widehat{4} - 7^0}{x}$

e) $\frac{0,2x + 1,6}{\sqrt{1,8 \,.\, 5^{-1}}} = \frac{3,\widehat{3}}{0,4^{-1}}$

f) $\frac{x+2}{x-3} = \frac{2 \,.\, 3^{-2}}{\sqrt{0,\widehat{4}}}$

g) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}}{1 + 2^{-1}} = \frac{3x+2}{x-4}$

h) $\frac{\frac{3}{5} - 0,8}{x+1} = \frac{x-1}{-40}$

i) $\frac{x + \frac{1}{3}}{\sqrt{1 + 0,\widehat{7}}} = \frac{0,\widehat{3}}{x + \frac{1}{3}}$

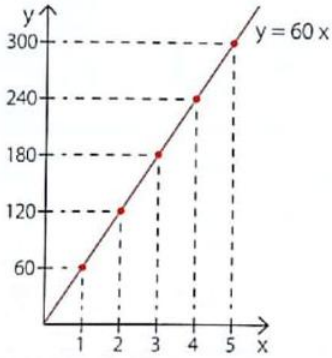
Función de proporcionalidad directa

Teoría

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando el cociente entre ambas es siempre un mismo valor **k**.

Un automóvil que se desplaza a una velocidad constante de $60\ \frac{km}{h}$.

Tiempo en horas	Distancia recorrida en km
x	y
1	60
2	120
3	180
4	240
5	300



$k = \frac{y}{x} = \frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{180}{3} = \frac{240}{4} = \frac{300}{6}$ $\quad y = 60x$

La función de **proporcionalidad directa** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas y su pendiente es k.

36 **Marcar con una x las tablas que correspondan a funciones de proporcionalidad directa.**

a)

x	y
$\frac{6}{5}$	9
0,1	$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{5}$	6
6	45
$\frac{24}{5}$	36

b)

x	y
$\frac{3}{2}$	3
0,9	5
1	$\frac{9}{2}$
6	$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$	9

c)

x	y
$\frac{2}{3}$	4
0,75	$\frac{9}{2}$
$\frac{5}{6}$	5
$1,\widehat{1}$	$\frac{20}{3}$
0,1	$\frac{3}{5}$

d)

x	y
2,5	5
$\frac{3}{4}$	1,2
$0,\widehat{8}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{7}{3}$	2,1
$1,\widehat{2}$	$\frac{6}{5}$

37 Las siguientes tablas corresponden a funciones de proporcionalidad directa.
Hallar la constante k, la fórmula de cada una, completar las tablas y graficar.

a)

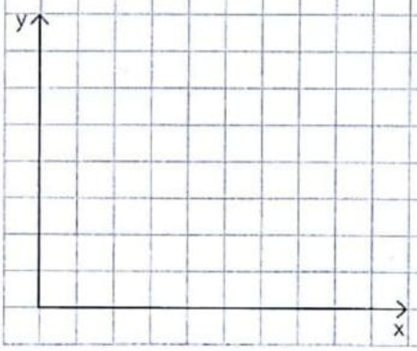
x	y
2	
4	
12	
8	6
20	

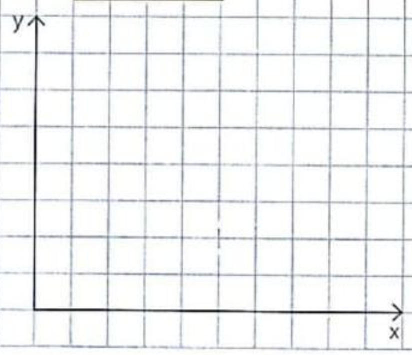
b)

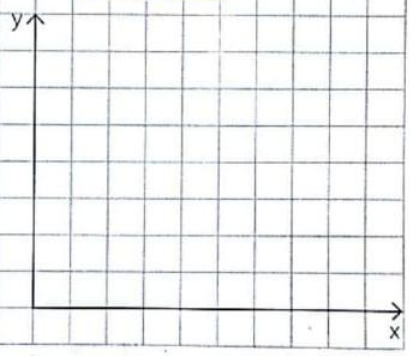
x	y
2	1
8	
4	
10	
6	

c)

x	y
9	
3	
6	
12	8
15	







38 Una canilla llena una pileta de 5 400 litros en 5 horas.

a) **Hallar la función que permita calcular la cantidad (y) de litros que arroja la canilla en x minutos.**

Calcular y responder

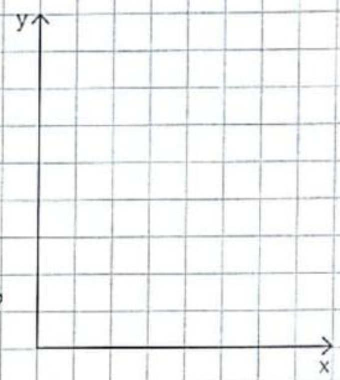
b) ¿Cuántos litros de agua arroja la canilla en 18 min?

c) ¿Y cuántos, en 2 h 40 min?

d) ¿Cuánto tarda en arrojar 1 350 litros?

e) ¿Y cuánto, en arrojar 3 420 litros?

f) **Graficar la función.**



39 **Plantear la proporción y resolver.**

a) Cinco docenas de alfajores cuestan $ 108. ¿cuál es el valor de 35 alfajores?

b) Un automóvil consume 28 litros de combustible para recorrer 350 km. ¿Cuantos km recorre con 12 litros?

c) Para preparar masa de pizza, se utilizan 420 g de levadura cada 15 kg de harina. ¿Cuántos gramos de levadura llevan 8 kg de harina?

d) Para pintar 27 m^2 de pared, se necesitan 15 litros de pintura. ¿Qué superficie se puede pintar con 25 litros de pintura?

e) Una fotocopiadora hace 3 150 fotocopias en una hora y media. ¿Cuántas fotocopias se pueden hacer en 40 minutos?

f) Siete personas abonan $ 3 465 por hospedarse 3 días en un hotel. ¿Cuánto pagarán cuatro personas por hospedarse 6 días?

40 Una empresa reparte $ 3 395 del salario familiar de manera directamente proporcional a la cantidad de integrantes que tiene cada familia de sus 7 empleados.

a) **Completar la tabla con el importe que recibe cada familia.**

Familia	Rodríguez	Torreta	Ferrari	Luján	Acevedo	Portino	Cuenca
Integrantes	8	5	4	6	2	7	3
Importe							

b) **Hallar la función que permita calcular el importe (y) que recibe una familia de x integrantes**

Para pensar y resolver

41 **Analizar si la longitud del lado de un cuadrado es proporcional a su superficie. Justificar.**

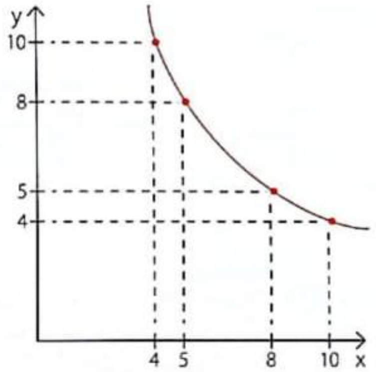
Función de proporcionalidad inversa

Teoría

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el producto entre ambas es siempre un mismo valor **k**.

Para vaciar una pileta de natación, se utilizan varias bombas que arrojan la misma cantidad de agua.

Tiempo en que se vacía la pileta (en horas)	Cantidad de bombas necesarias
x	y
5	8
2	20
10	4
8	5
4	10



$y \cdot x = k \Rightarrow y = \frac{k}{x}$

$k = 5 \cdot 8 = 2 \cdot 20 = 10 \cdot 4 = 8 \cdot 5 = 1 \cdot 40 = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{x}$

La **función de proporcionalidad inversa** es una **hipérbola**.

42 **Marcar con una x las tablas que correspondan a funciones de proporcionalidad inversa.**

a)

x	y
1,8	2
$\frac{3}{5}$	0,4
$0,\hat{6}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{1}{3}$	3,5
$1,\hat{5}$	$\frac{3}{4}$

☐

b)

x	y
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
0,45	$\frac{5}{6}$
0,5	$\frac{3}{4}$
$0,\hat{6}$	$\frac{9}{16}$
$\frac{1}{4}$	1,5

☐

c)

x	y
$\frac{1}{2}$	8
0,1	40
$\frac{4}{3}$	3
0,8	50
$\frac{5}{6}$	4,8

☐

d)

x	y
$\frac{2}{15}$	2
0,15	$\frac{9}{4}$
$\frac{1}{6}$	2,5
$0,\hat{2}$	$\frac{10}{3}$
0,02	$\frac{3}{10}$

☐

43 Las siguientes tablas corresponden a funciones de proporcionalidad inversa.
Hallar la constante k, la fórmula de cada una, completar las tablas y graficar.

a)

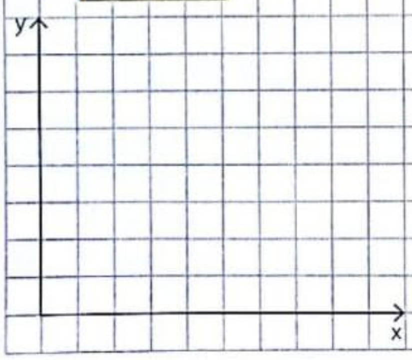
x	y
3	
4	
12	
8	6
2	

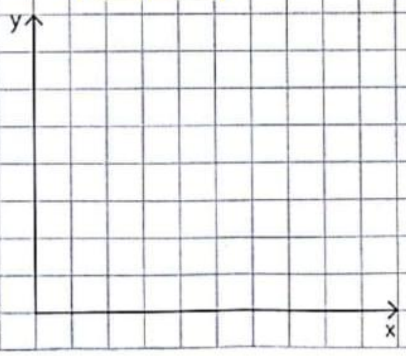
b)

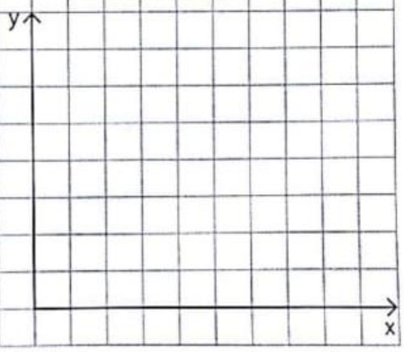
x	y
3	4
6	
4	
1	
2	

c)

x	y
3	
4	6
6	
8	
1	







44 Un tren tarda 6 horas en recorrer un trayecto a una velocidad constante de $80 \frac{km}{h}$.

a) Hallar la función que permita calcular la velocidad (y) del tren que tarda x horas en recorrer el trayecto.

g) Graficar la función.

Calcular y responder

b) ¿Cuál es la distancia del trayecto?

c) ¿A qué velocidad debe ir para llegar en 4 horas?

d) ¿Y para llegar en 5 h 20 min?

e) ¿Cuánto tarda en llegar a $40 \frac{km}{h}$?

f) ¿Y cuánto si va a $100 \frac{km}{h}$?

45 **Plantear, a partir de la definición de magnitudes inversamente proporcionales, y resolver.**

a) Las ruedas delanteras de un carro tienen un diámetro de 0,8 m; y las traseras, uno de 1,4 m. Si en una cierta distancia una rueda delantera da 504 vueltas, ¿cuántas vueltas dará una trasera?

b) Una máquina que envasa alfajores funciona 12 horas diarias durante 8 días para cumplir con un pedido. ¿Cuántas horas diarias deberá funcionar para cumplir con el pedido en 6 días?

c) Para cubrir las paredes de un baño se necesitan 120 azulejos de 8 dm^2 de superficie. ¿Cuántos azulejos de 10 dm^2 se necesitarán para cubrir las mismas paredes?

d) Una familia de 5 personas se hospeda en un hotel durante 20 días. Si otra familia abona lo mismo, pero con un integrante menos, ¿cuántos días se hospedó en el hotel?

Para pensar y resolver

46 **Colocar D o I según las magnitudes sean directa o inversamente proporcionales.**

a) La **cantidad** de agua que arroja una canilla y el **tiempo** que está abierta. ☐

b) La **longitud** del lado de un cuadrado y la **medida** de su perímetro. ☐

c) El **tiempo** de un viaje en avión y su **velocidad**. ☐

d) La **cantidad** de personas que alquila un departamento y lo que **abona** cada una. ☐

e) El **tiempo** de una llamada por celular y el **importe** a pagar. ☐

f) El **diámetro** de un caño y la **cantidad** de agua que desagota. ☐

Teorema de Thales

Teoría

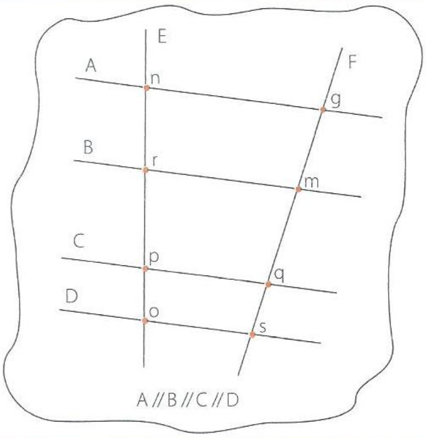
Cuando tres o más rectas paralelas (A, B, C y D) son cortadas por dos transversales (E y F), quedan determinados en ambas transversales varios segmentos ($\overline{nr}$, $\overline{rp}$, $\overline{gm}$, $\overline{ms}$, etc.).

Los segmentos **homólogos** son los que se encuentran entre dos paralelas y uno en cada transversal. Por ejemplo: $\overline{nr}$ y $\overline{gm}$ son homólogos, y también lo son $\overline{ro}$ y $\overline{ms}$.

La razón entre cualquier par de segmentos determinados en una de las transversales es igual a la razón de sus homólogos.

$$\frac{\overline{nr}}{\overline{rp}} = \frac{\overline{gm}}{\overline{mq}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{rp}}{\overline{po}} = \frac{\overline{mq}}{\overline{qs}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{ro}}{\overline{np}} = \frac{\overline{ms}}{\overline{gq}} \quad \wedge \quad \frac{\overline{no}}{\overline{ro}} = \frac{\overline{gs}}{\overline{ms}}$$

Los segmentos homólogos son **proporcionales** entre sí.



20 **Completar con el segmento que corresponda en cada caso.**

a) $\frac{\overline{ae}}{\overline{nf}} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{\overline{bo}}{\overline{gd}} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{\overline{ec}}{\overline{af}} = \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{\overline{io}}{\overline{bg}} = \frac{\square}{\square}$

e) $\frac{\overline{en}}{\overline{ef}} = \frac{\square}{\square}$

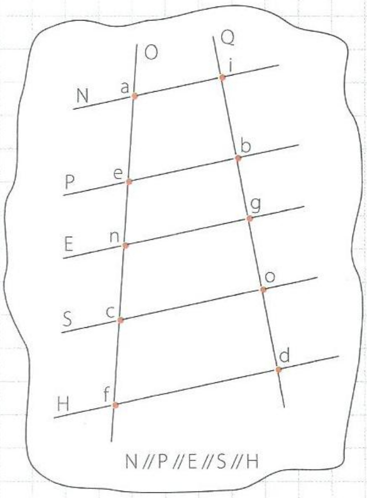
f) $\frac{\overline{od}}{\overline{gi}} = \frac{\square}{\square}$

g) $\frac{\overline{cf}}{\square} = \frac{\square}{\overline{oi}}$

h) $\frac{\overline{og}}{\square} = \frac{\square}{\overline{af}}$

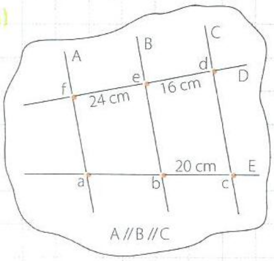
i) $\frac{\square}{\overline{ac}} = \frac{\overline{gd}}{\square}$

j) $\frac{\square}{\overline{bi}} = \frac{\overline{nf}}{\square}$

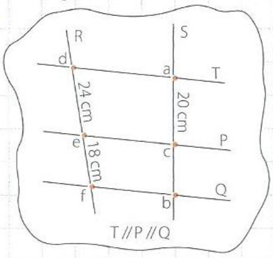


21 **Hallar la longitud del segmento $\overline{ab}$ de cada figura.**

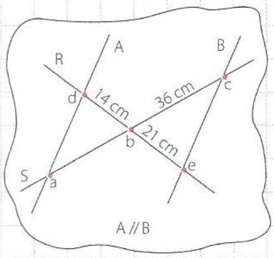
a)



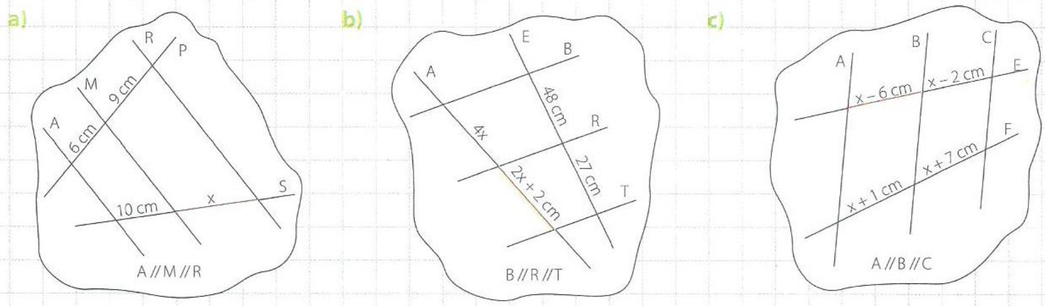
b)



c)



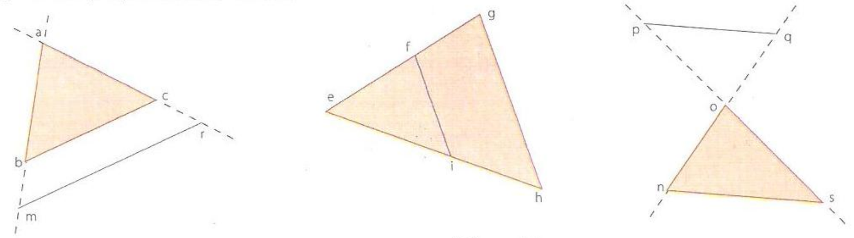
22 **Hallar la longitud del segmento rojo en cada figura.**



Consecuencia del teorema de Thales

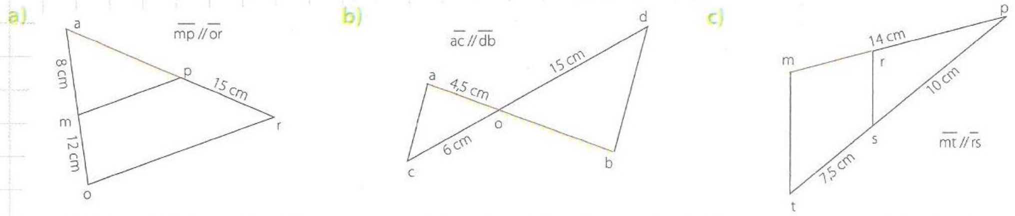
Teoría

Toda recta paralela a cualquier lado de un triángulo determina, sobre las rectas que contienen a los otros dos lados, segmentos proporcionales a ellos.



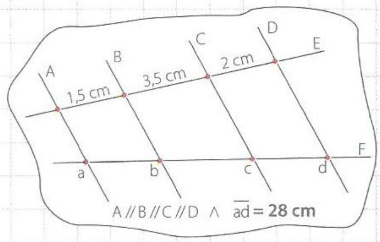
$\overline{bc} \parallel \overline{mr} \Rightarrow \dfrac{\overline{ab}}{\overline{am}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ar}}$ $\overline{fi} \parallel \overline{gh} \Rightarrow \dfrac{\overline{eg}}{\overline{ef}} = \dfrac{\overline{eh}}{\overline{ei}}$ $\overline{pq} \parallel \overline{ns} \Rightarrow \dfrac{\overline{os}}{\overline{op}} = \dfrac{\overline{on}}{\overline{oq}}$

23 **Hallar la longitud del segmento rojo en cada una de las siguientes figuras.**



Para pensar y resolver

24 **Calcular la longitud de los segmentos $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{cd}$.**

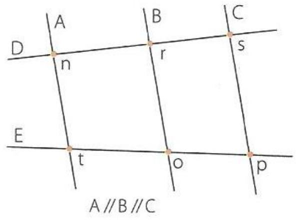


Tarea para el hogar

35 **Plantear la proporción correspondiente en cada figura y calcular.**

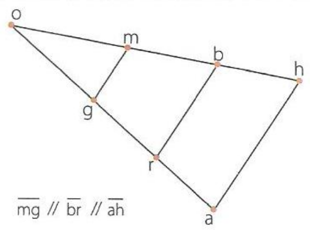
a) La longitud de $\overline{to}$.

$\overline{ns} = 20$ cm
$\overline{rn} = 12$ cm
$\overline{op} = 5$ cm



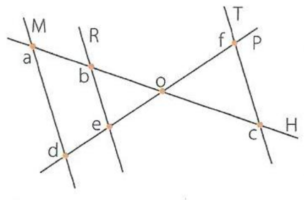
c) La longitud de $\overline{mo}$, $\overline{mb}$, $\overline{gr}$ y $\overline{ar}$.

$\overline{ho} = 24$ cm
$\overline{or} = 14{,}4$ cm
$\overline{bh} = 6$ cm
$\overline{og} = 8$ cm



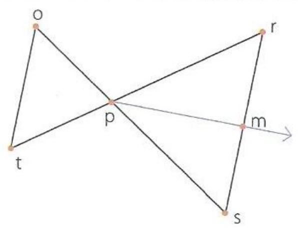
b) La longitud de $\overline{bo}$ y $\overline{of}$.

$\overline{ab} = \overline{eo} = 6$ cm
$\overline{oc} = 9$ cm
$\overline{de} = 5$ cm



d) La longitud de $\overline{op}$, $\overline{tp}$ y $\overline{pr}$.

$\overline{tr} = 25$ cm
$\overline{ps} = 18$ cm
$\overline{rm} = 5$ cm
$\overline{ms} = 6$ cm



36 **Dividir cada segmento según se pide en cada caso.**

a) En cinco partes iguales. **b)** En dos partes cuya razón sea $\frac{2}{5}$. **c)** En dos partes cuya razón sea 5.

Unidad III: Concepto de Función

Teoría

Una relación entre dos conjuntos numéricos A y B es un conjunto de pares ordenados (x; y), con la condición de que $x \in A \wedge y \in B$.

Ejemplo: $R: A \rightarrow B \wedge A = \{0; 1; 2\} \wedge B = \{3; 4; 5; 6\}$

a) $R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ b) $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ c) $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Una relación es una función cuando se cumplen dos condiciones:

1) Todos los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B (existencia).
2) Cada elemento del conjunto A se relaciona con un único elemento del conjunto B (unicidad).

Del ejemplo anterior:
En R_1, el 0 se relaciona con 2 elementos del conjunto B, el 3 y el 4 (no cumplen con la condición de unicidad).
En R_2, el 0 no está relacionado con ningún elemento del conjunto B (no cumple con la condición de existencia).
En R_3, todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, es función.

$f: A \rightarrow B \wedge f = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \rightarrow 5 \text{ es la "imagen" de } 0 \text{ y } 0 \text{ es la "preimagen" de } 5 \\ f(1) = 6 \rightarrow 6 \text{ es la "imagen" de } 1 \text{ y } 1 \text{ es la "preimagen" de } 6 \\ f(2) = 3 \rightarrow 3 \text{ es la "imagen" de } 2 \text{ y } 2 \text{ es la "preimagen" de } 3 \end{cases}$$

1 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = \{2;4;7;8\} \wedge B = \{1;3;5;7;9\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
2	1
4	1
7	1
8	1

b)

x	y
7	1
7	3
7	5
7	9

c)

x	y
2	3
8	1
4	5

d)

x	y
8	1
7	5
4	9
2	3

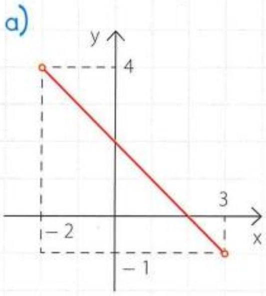
e)

x	y
8	5
4	3
7	1
2	9
8	7

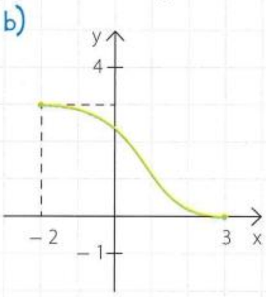
2 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = [-2;3] \wedge B = [-1;4]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.

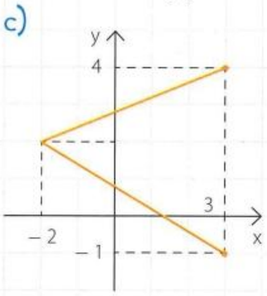
a)



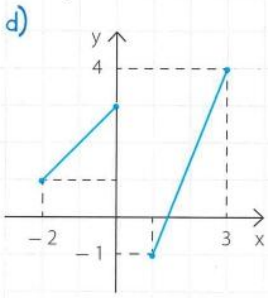
b)



c)

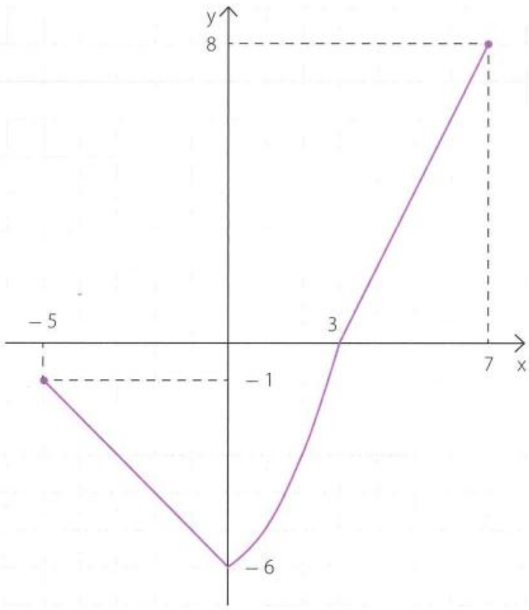


d)



3 Observar el gráfico de la función y responder.

a) ¿Cuál es la imagen de 3?
b) ¿Y cuál la de -3?
c) ¿Cuál es la preimagen de 2?
d) ¿Y cuál la de 4?
e) ¿En qué valor de x la función vale 0?
f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?
g) Escribir dos valores de x con la misma imagen.



Completar según corresponda.

h) $f(2) = \square$ j) $f(-4) = \square$

i) $f(\square) = 6$ k) $f(\square) = 8$

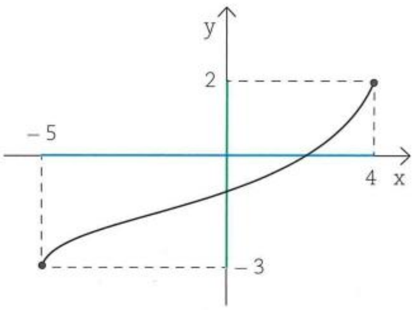
Dominio e imagen de una función

Teoría

En una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su **dominio** es un conjunto de números reales que pueden ser valores de **x**; y su **imagen**, los que pueden ser valores de **y**.

a) En la función f, el dominio son los valores marcados en azul; y la imagen, los marcados en verde.

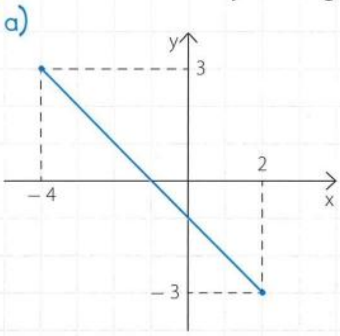
$$f : \underbrace{[-5\,;4]}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{[-3\,;2]}_{\text{Imagen}}$$



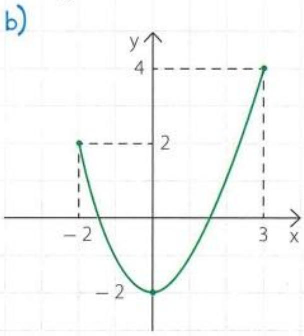
b) En la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, el dominio son los reales positivos; y el cero, al igual que su imagen: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

4 Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

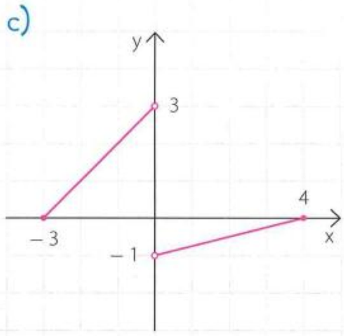
a)



b)



c)



5 Hallar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5x - 1$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ d) $f(x) = \sqrt{x-3}$ f) $f(x) = \sqrt{1-x}$

Desafío

6 Decidir si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar.

a) $R_1 : N_0 \to N_0 \wedge R_1(x) = x - 1$ b) $R_2 : N \to Q \wedge R_2(x) = \sqrt{x}$ c) $R_3 : N_0 \to Q \wedge R_3(x) = \dfrac{x}{x+5}$

Conjuntos de ceros o raíces, positividad y negatividad

Teoría

- El **conjunto de ceros** o **raíces** de una función son los valores de x que determinan que $f(x) = 0$.

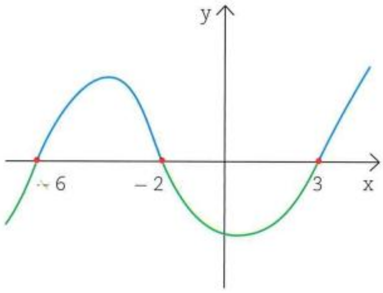
  $f(-6) = 0 \wedge f(-2) = 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow C^0 = \{-6\,;-2\,;3\}$

- El o los **conjuntos de positividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea positiva, o sea, que $f(x) > 0$, (gráfica en azul).

  $C^+ = (-6\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$

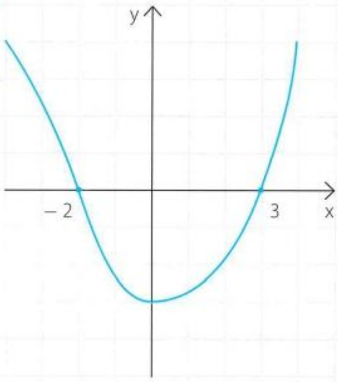
- El o los **conjuntos de negatividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea negativa, o sea, que $f(x) < 0$, (gráfica en verde).

  $C^- = (-\infty\,;-6) \cup (-2\,;3)$

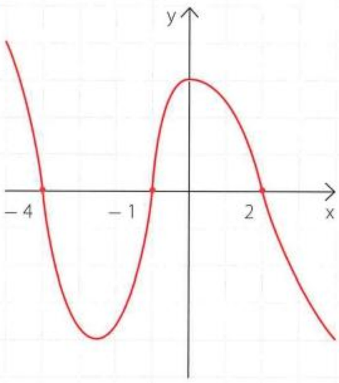


7 Escribir los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones.

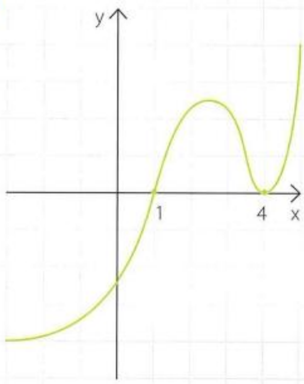
a)



b)



c)



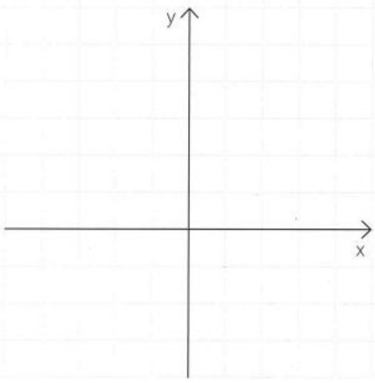
$C^0 =$ $C^0 =$ $C^0 =$

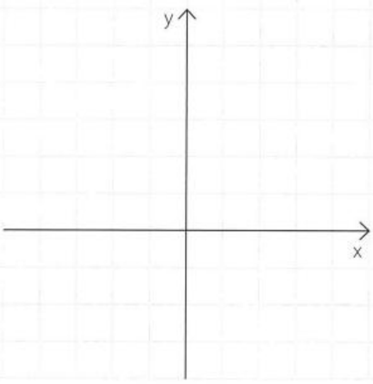
$C^+ =$ $C^+ =$ $C^+ =$

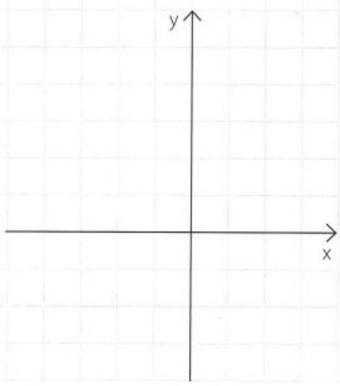
$C^- =$ $C^- =$ $C^- =$

8 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

a) $f(1) = 0 \wedge f(-3) = 0 \wedge f(0) > 0$ b) $C^0 = \{-2\,;0\,;3\} \wedge f(-5) < 0 \wedge f(1) < 0$ c) $f(-4) = 0 \wedge f(0) = 0 \wedge C^- = \varnothing$







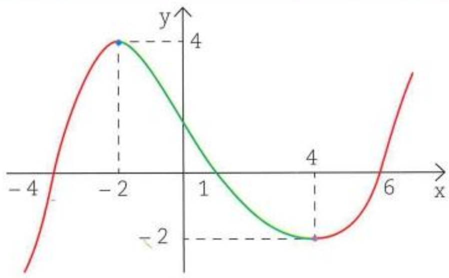
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teoría

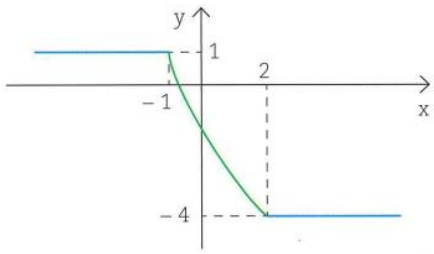
Si a medida que los valores de x aumentan, el valor de la función aumenta, entonces, la función **crece**; pero si disminuyen, entonces, la función **decrece**.
En $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$, la función no crece ni decrece. Los puntos $(-2\,;4)$ y $(4\,;-2)$ se denominan **máximo** y **mínimo relativo**, respectivamente.

Crecimiento: $(-\infty\,;-2)\cup(4\,;+\infty)$.

Decrecimiento: $(-2\,;\,4)$.



Cuando al aumentar los valores de x, los valores de la función no varían, la función no crece ni decrece, sino que se mantiene **constante**.
$f(-3) = f(-2) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(3) = f(4) = -4$
La función es constante en: $(-\infty\,;-1)\cup(2\,;+\infty)$.

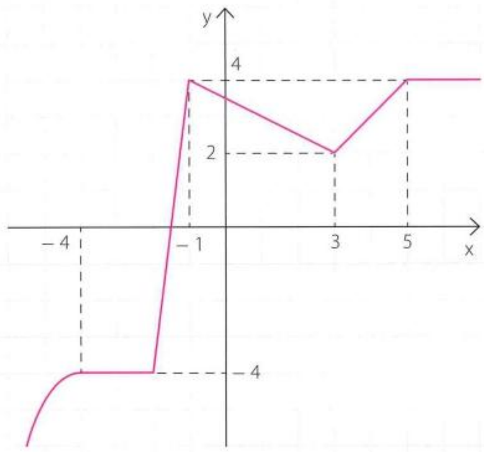


9 Observar el gráfico y escribir.

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

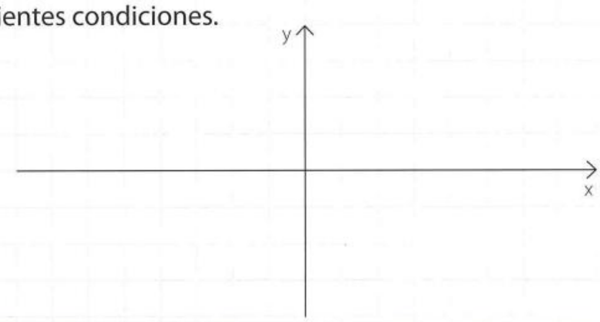
b) El o los intervalos donde es constante.

c) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



10 Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones.

- Crecimiento: $(-\infty\,;-5)\cup(2\,;+\infty)$
- Es constante: $(-5\,;-2)$
- $f(-7) = f(0) = f(5) = 0$
- Mínimo relativo en $(2\,;-2)$



Desafío

11 Indicar cuáles de las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 1 - x$

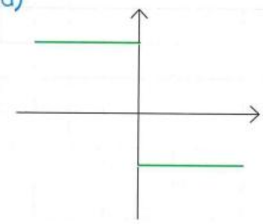
d) $f(x) = \sqrt{x}$

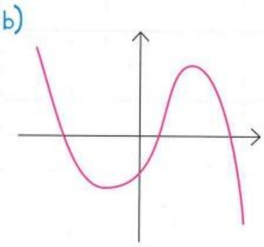
e) $f(x) = x^3$

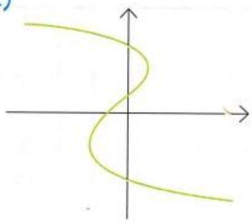
f) $f(x) = -7$

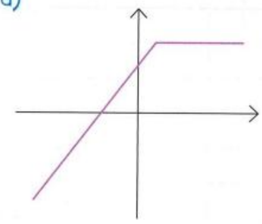
Repaso

12 Indicar si las siguientes relaciones de R: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones y justificar.

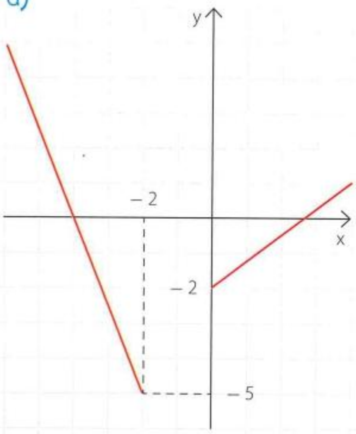
a)


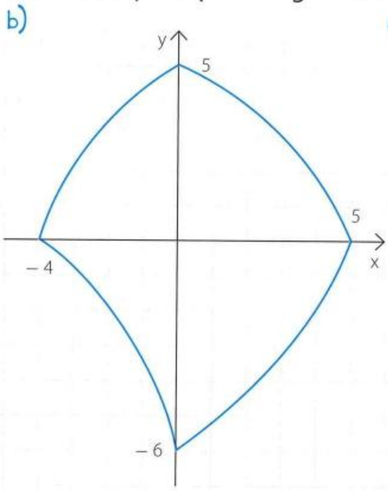
b)


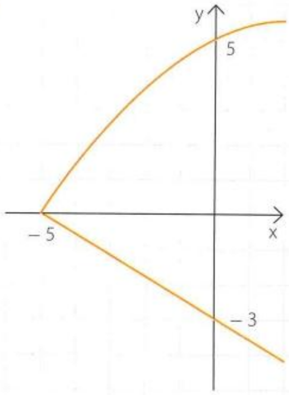
c)


d)


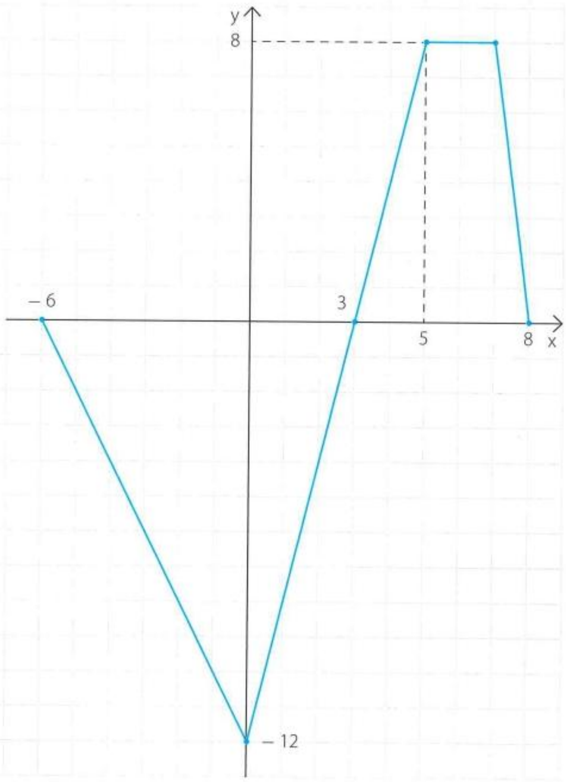
13 Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.

a)


b)


c)


14 Observar el gráfico de la función y responder.



a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?

b) ¿Cuáles son las raíces?

c) ¿Cuál es la imagen de – 2?

d) ¿Y cuál la de 0?

e) ¿Cuáles son las preimágenes de – 4?

f) ¿En qué intervalo la función vale 8?

Colocar >, < o = según corresponda.

g) f(2) ☐ f(4)

h) f(6) ☐ f(7)

i) f(– 1) ☐ f(– 2)

j) f(1) ☐ f(5)

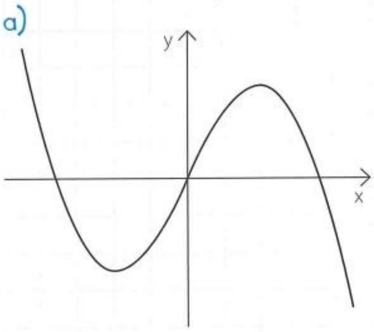
k) f(8) ☐ f(– 6)

l) f(– 3) ☐ f(1)

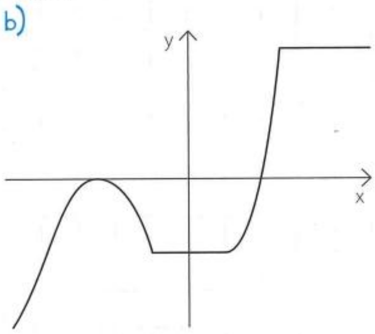
15 Marcar sobre el eje x.

- Con **rojo**: los intervalos de positividad.
- Con **verde**: los intervalos de negatividad.
- Con **azul**: el conjunto de ceros o raíces.

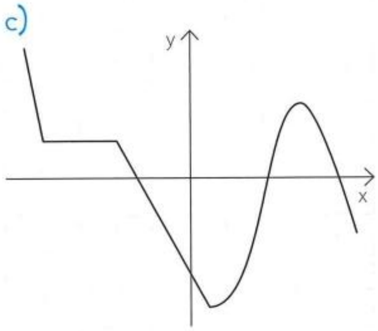
a)



b)



c)

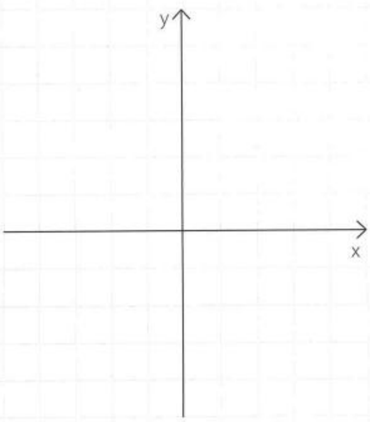


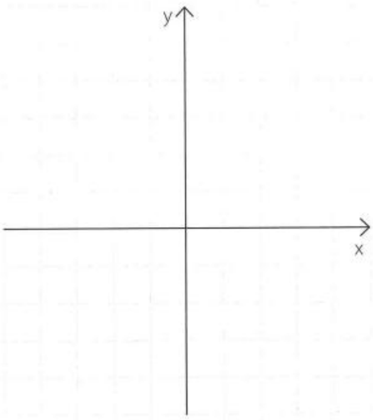
16 **Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.**

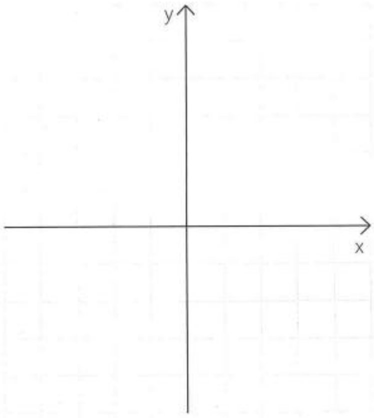
a) Es constante en $(-\infty ; -1)$; decreciente en $(-1 ; 3)$ y tiene un mínimo relativo en $(3 ; -4)$.

b) Es constante en $(-2 ; 0)$ y es creciente en $(-\infty ; -2) \cup (3 ; +\infty)$.

c) Tiene máximos relativos en $(-4 ; 1)$ y $(3 ; 0)$ y $f(0) = -3$.







17 Observar el gráfico y escribir.

a) Los conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) El o los intervalos donde es constante.

d) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.