Escuela Normal Superior y Superior de Comercio N°46

"Domingo Guzmán Silva"

Cuadernillo de MATEMÁTICA

5to año

Ciclo lectivo: 2025

Organización del cuadernillo

Acuerdo Pedagógico

Pautas de trabajo y convivencia:

- Queda prohibido el uso del celular en el aula, excepto que la/el docente lo autorice para trabajar en clases.
- Es necesario contar con calculadoras científicas como herramienta de aprendizaje y trabajo propio de la materia.
- Los estudiantes deben asistir a clases con los elementos necesarios para su desarrollo: carpeta, lapicera, lápiz, regla, goma y cuando sea necesario elementos de geometría.
- Los alumnos cuentan con un cuadernillo de trabajo que deberán tener en cada clase de matemática en **formato papel.**
- Es importante el respeto hacia cada integrante de la institución (compañeros, docentes, personal no docente, preceptores y directivos).

Para acreditar la materia:

- Asistencia a clases
- Participación en clases
- Carpeta y cuadernillo completos
- Aprobar las evaluaciones orales, escritas, grupales y/o individuales.
- Se informará con la suficiente antelación las fechas que serán evaluados/as.
- Se tomará un trabajo integrador a fin de año.

……………………………………… ………………………………………………

Firma estudiante Firma padre/madre/tutor

Revisión: Ubicación de puntos en el plano. Interpretación de gráficos.

Antes de empezar a interpretar los gráficos tendremos que ver cómo se ubican los puntos en el plano, para lo cual tenemos que ver algunos nuevos términos y cuestiones a tener en cuenta.

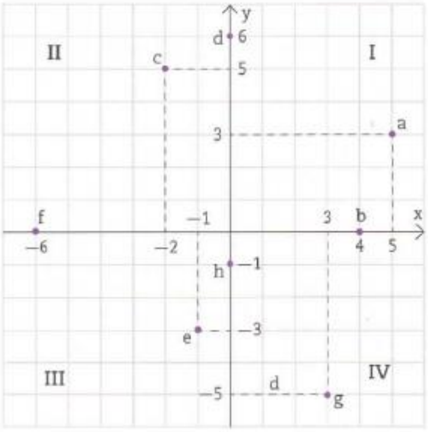
Ejes cartesianos

Teoría

Los ejes cartesianos son dos rectas perpendiculares que dividen el plano en cuatro cuadrantes. Cada punto del plano está determinado por un par ordenado (x , y). El punto donde se cortan los ejes se denomina origen de coordenadas y corresponde al punto (0 ; 0).

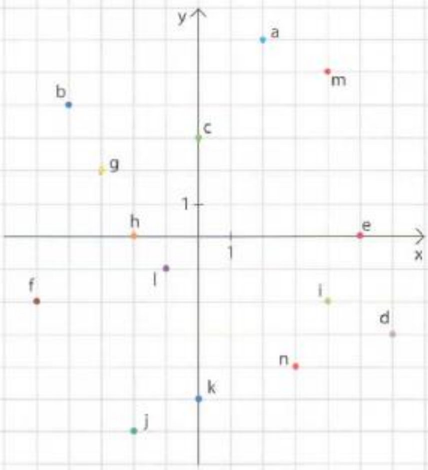
A la recta horizontal, se la denomina eje **x** o de las **abscisas**.
A la recta vertical, se la denomina eje **y** o de las **ordenadas**.
Los puntos que están sobre los ejes no pertenecen a ningún cuadrante.

Punto	x	y				
a	5	3	→	(5 ; 3)	→	cuadrante I
b	4	0	→	(4 ; 0)	→	eje x
c	− 2	5	→	(− 2 ; 5)	→	cuadrante II
d	0	6	→	(0 ; 6)	→	eje y
e	− 1	− 3	→	(− 1 ; − 3)	→	cuadrante III
f	− 6	0	→	(− 6 ; 0)	→	eje x
g	3	− 5	→	(3 ; − 5)	→	cuadrante IV
h	0	− 1	→	(0 ; − 1)	→	eje y



1 Escribir las coordenadas de los puntos marcados en el plano.

a = (;)
b = (;)
c = (;)
d = (;)
e = (;)
f = (;)
g = (;)
h = (;)
i = (;)
j = (;)
k = (;)
l = (;)
m = (;)
n = (;)



2 Observar los puntos del ejercicio anterior y colocar **V** (verdadero) o **F** (falso) según corresponda.

a) La abscisa del punto **m** es negativa. ☐
b) La ordenada del punto **g** es positiva. ☐
c) El punto **b** tiene las componentes iguales. ☐
d) La abscisa del punto **i** es el doble de su ordenada. ☐
e) La ordenada del punto **j** es el triple de su abscisa. ☐

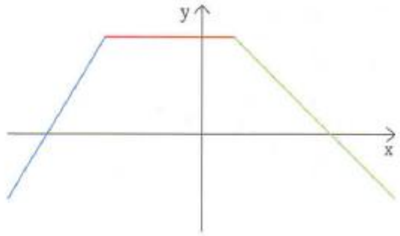
Interpretación de gráficas

Teoría

Una gráfica representa la relación que existe entre dos variables mediante puntos en un plano. Para realizar el análisis de una gráfica, se debe tener en cuenta qué ocurre con los valores de la ordenada a medida que varían los valores de la abscisa.

Al aumentar el valor de **x**, puede ocurrir que el valor de **y**

- aumente, entonces, la gráfica aumenta.
- disminuya, entonces, la gráfica disminuye.
- se mantenga igual, entonces, la gráfica es constante.



7 Observar la gráfica y colocar A (aumenta), C (constante) o D (disminuye).

a) $-3 < x < -2$ ☐

b) $0 < x < 1$ ☐

c) $4 < x < 5$ ☐

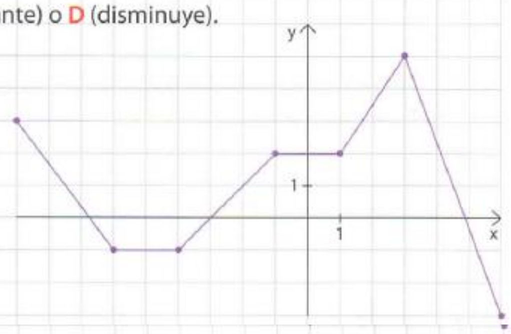
d) $-6 < x < -5$ ☐

e) $1 < x < 2$ ☐

f) $-8 < x < -7$ ☐

g) $-2 < x < -1$ ☐

h) $3 < x < 4$ ☐



8 Observar la gráfica y completar los pares ordenados.

a) $(-6; \square)$

b) $(\square; 4)$

c) $(-3; \square)$

d) $(\square; -8)$

e) $(0; \square)$

f) $(\square; 0)$

Escribir todos los puntos que cumplan con cada condición.

g) Tengan ordenada igual a 3:

h) Tengan las componentes iguales:

Observar la gráfica y responder.

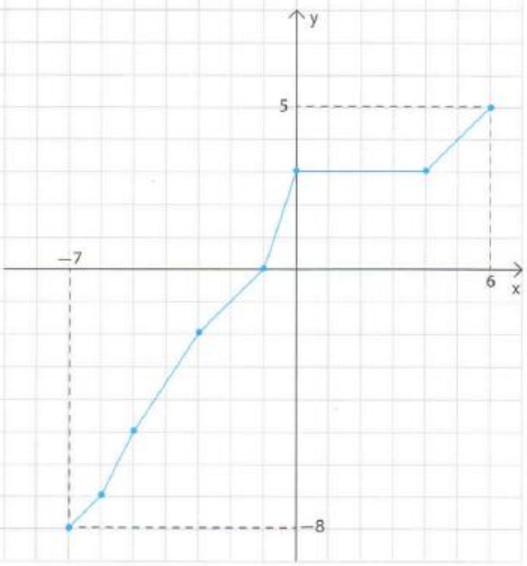
i) ¿Entre qué valores varía la abscisa?

j) ¿Entre cuáles la ordenada?

k) ¿Entre qué valores de x la gráfica es negativa?

l) ¿Entre cuáles es positiva?

m) ¿Y entre cuáles es constante?



9 La gráfica muestra las temperaturas **máximas** y **mínimas** de una ciudad durante los primeros 15 días de julio.
Observar el gráfico y responder.

a) ¿Entre qué valores se registraron las temperaturas máximas?

b) ¿Y entre cuáles las temperaturas mínimas?

c) ¿En qué días las temperaturas máximas fueron menores que 0°C?

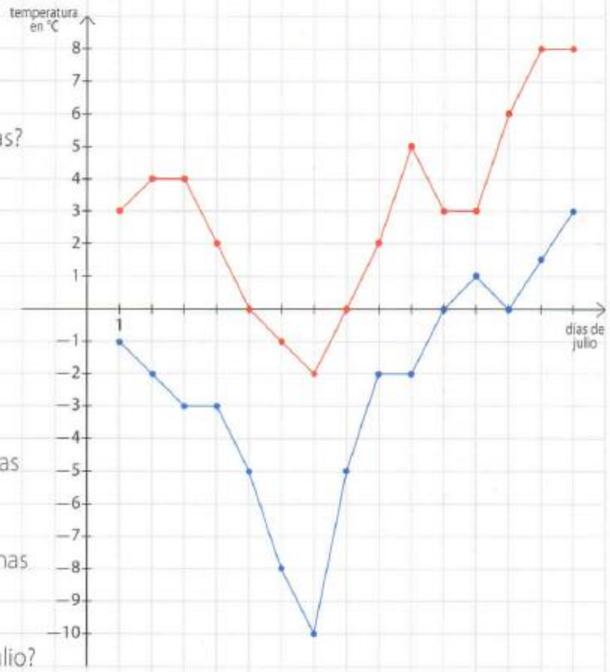
d) ¿En qué períodos las temperaturas máximas aumentaron?

e) ¿En cuáles diminuyeron?

f) ¿Entre qué días las temperaturas máximas tuvieron un menor aumento?

g) ¿En qué período las temperaturas mínimas fueron menores a – 5°C?

h) ¿Cuál fue la amplitud térmica del 7 de julio?



10 **Completar con los valores que correspondan.**

a) $-5 < x < -3 \longrightarrow$ ___ $< y <$ ___

b) $0 < x < 2 \longrightarrow$ ___ $< y <$ ___

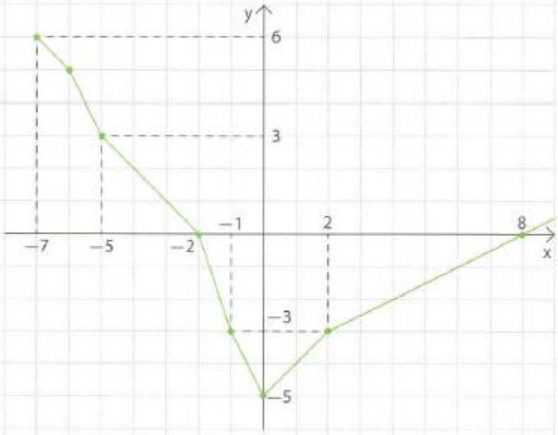
c) ___ $< x <$ ___ $\longrightarrow 0 < y < 3$

d) ___ $< x <$ ___ $\longrightarrow 3 < y < 6$

e) $-2 < x < -1 \longrightarrow$ ___ $< y <$ ___

f) ___ $< x < 8 \longrightarrow -5 < y <$ ___

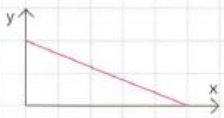
g) $-6 < x <$ ___ $\longrightarrow 2 < y <$ ___



Desafío

11 En las gráficas, se relacionan diferentes variables.
Describir una situación para cada una de las gráficas.

a)

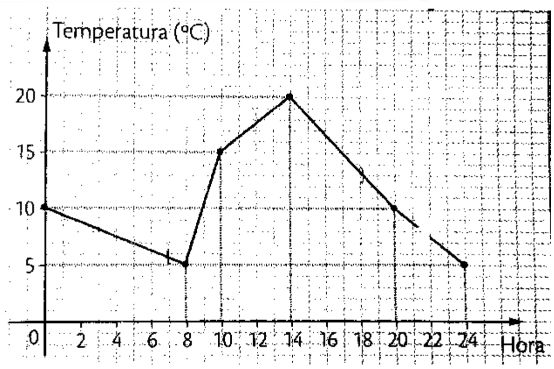


b)

c)

12) El siguiente gráfico muestra las distintas temperaturas que se registraron en Buenos Aires durante un día del año.

a) ¿Qué significa el punto (10;15)?
b) Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿La temperatura fue de 0°C en algún momento? ¿Por qué?
d) ¿Posee punto máximo? ¿Cuál? ¿en qué hora del día se registró?
e) Mencionar los intervalos de tiempo en los cuales la temperatura fue mayor a 12°C



Concepto de Función

Teoría

Una relación entre dos conjuntos numéricos A y B es un conjunto de pares ordenados (x; y), con la condición de que $x \in A \wedge y \in B$.

Ejemplo: $R: A \rightarrow B \wedge A = \{0; 1; 2\} \wedge B = \{3; 4; 5; 6\}$

a) $R_1 = \{(0;3), (0;4), (1;5), (2;6)\}$ b) $R_2 = \{(1;3), (2;5)\}$ c) $R_3 = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

Una relación es una función cuando se cumplen dos condiciones:

1) Todos los elementos del conjunto A están relacionados con algún elemento del conjunto B (existencia).
2) Cada elemento del conjunto A se relaciona con un único elemento del conjunto B (unicidad).

Del ejemplo anterior:
En R_1, el 0 se relaciona con 2 elementos del conjunto B, el 3 y el 4 (no cumplen con la condición de unicidad).
En R_2, el 0 no está relacionado con ningún elemento del conjunto B (no cumple con la condición de existencia).
En R_3, todos los elementos de A se relacionan con un único elemento de B, por lo tanto, es función.

$f: A \rightarrow B \wedge f = \{(0;5), (1;6), (2;3)\}$

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 5 \rightarrow 5 \text{ es la "imagen" de } 0 \text{ y } 0 \text{ es la "preimagen" de } 5 \\ f(1) = 6 \rightarrow 6 \text{ es la "imagen" de } 1 \text{ y } 1 \text{ es la "preimagen" de } 6 \\ f(2) = 3 \rightarrow 3 \text{ es la "imagen" de } 2 \text{ y } 2 \text{ es la "preimagen" de } 3 \end{cases}$$

1 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = \{2;4;7;8\} \wedge B = \{1;3;5;7;9\}$

Indicar si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar la respuesta.

a)

x	y
2	1
4	1
7	1
8	1

b)

x	y
7	1
7	3
7	5
7	9

c)

x	y
2	3
8	1
4	5

d)

x	y
8	1
7	5
4	9
2	3

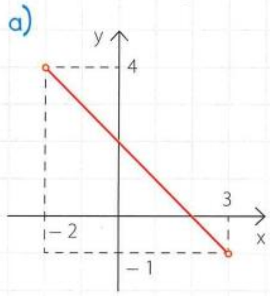
e)

x	y
8	5
4	3
7	1
2	9
8	7

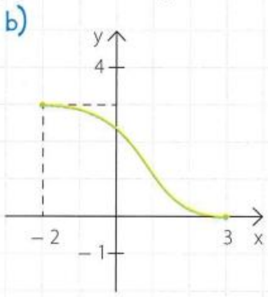
2 Se define $R: A \rightarrow B \wedge A = [-2;3] \wedge B = [-1;4]$

Indicar si los siguientes gráficos corresponden o no a funciones y justificar la respuesta.

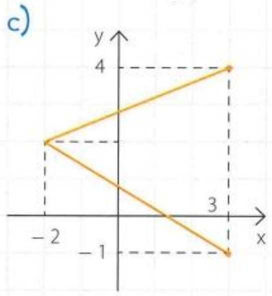
a)



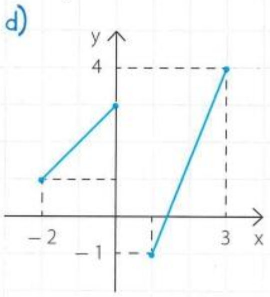
b)



c)

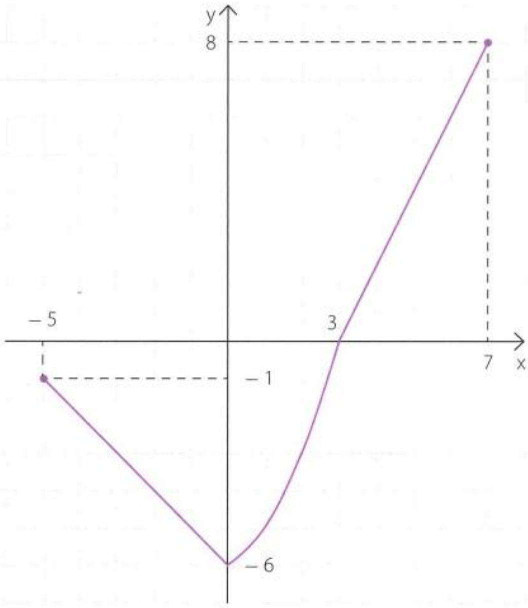


d)



3 **Observar el gráfico de la función y responder.**

a) ¿Cuál es la imagen de 3?
b) ¿Y cuál la de – 3?
c) ¿Cuál es la preimagen de 2?
d) ¿Y cuál la de 4?
e) ¿En qué valor de x la función vale 0?
f) ¿En qué valor de y el valor de x es 0?
g) Escribir dos valores de x con la misma imagen.



Completar según corresponda.

h) $f(2) = \square$ j) $f(-4) = \square$

i) $f(\square) = 6$ k) $f(\square) = 8$

Dominio e imagen de una función

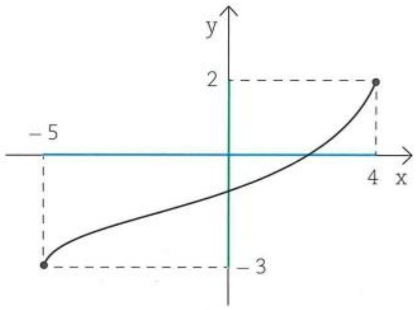
Teoría

En una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, su **dominio** es un conjunto de números reales que pueden ser valores de **x**; y su **imagen**, los que pueden ser valores de **y**.

a) En la función f, el dominio son los valores marcados en azul; y la imagen, los marcados en verde.

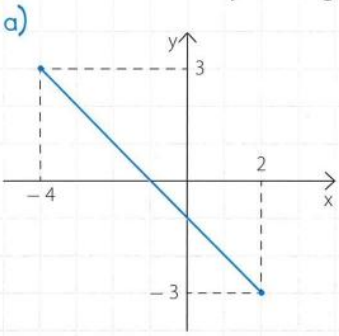
$$f: \underbrace{[-5\,;4]}_{\text{Dominio}} \to \underbrace{[-3\,;2]}_{\text{Imagen}}$$

b) En la función $y = f(x) = \sqrt{x}$, el dominio son los reales positivos; y el cero, al igual que su imagen: $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

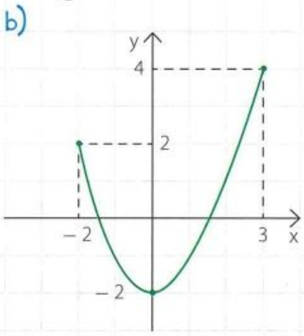


4 **Escribir el dominio y la imagen de las siguientes funciones.**

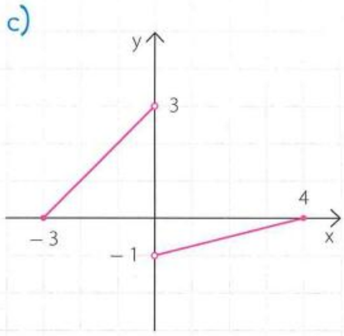
a)



b)



c)



5 **Hallar el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 5x - 1$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
d) $f(x) = \sqrt{x - 3}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$
f) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

Desafío

6 **Decidir si las siguientes relaciones son o no funciones y justificar.**

a) $R_1: N_0 \to N_0 \wedge R_1(x) = x - 1$
b) $R_2: N \to Q \wedge R_2(x) = \sqrt{x}$
c) $R_3: N_0 \to Q \wedge R_3(x) = \dfrac{x}{x + 5}$

Conjuntos de ceros o raíces, positividad y negatividad

Teoría

- El **conjunto de ceros** o **raíces** de una función son los valores de x que determinan que $f(x) = 0$.

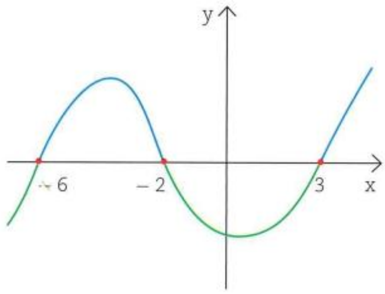
  $f(-6) = 0 \wedge f(-2) = 0 \wedge f(3) = 0 \Rightarrow C^0 = \{-6\,;-2\,;3\}$

- El o los **conjuntos de positividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea positiva, o sea, que $f(x) > 0$, (gráfica en azul).

  $C^+ = (-6\,;-2) \cup (3\,;+\infty)$

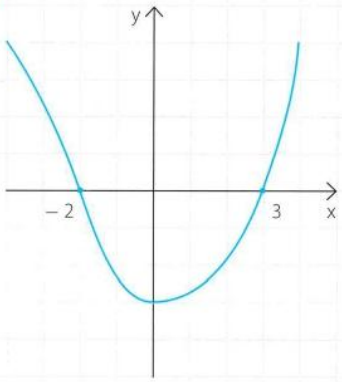
- El o los **conjuntos de negatividad** son los intervalos reales de los valores de x que determinan que la función sea negativa, o sea, que $f(x) < 0$, (gráfica en verde).

  $C^- = (-\infty\,;-6) \cup (-2\,;3)$



7 Escribir los conjuntos de ceros, positividad y negatividad de las siguientes funciones.

a)

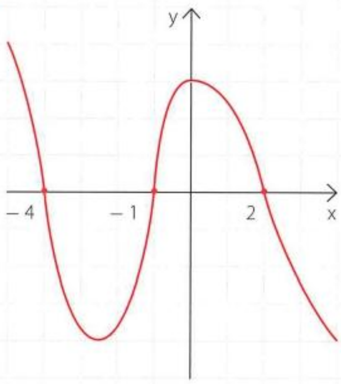


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

b)

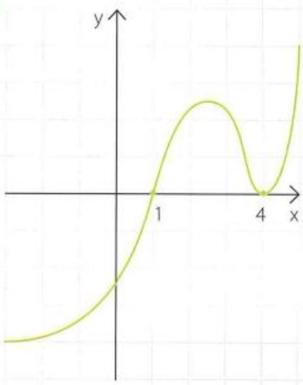


$C^0 =$

$C^+ =$

$C^- =$

c)



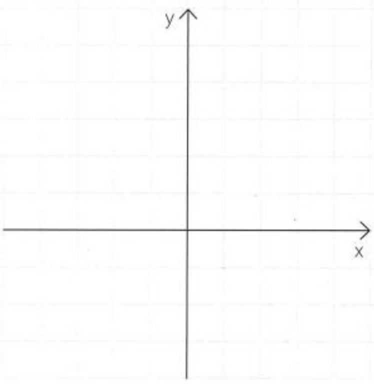
$C^0 =$

$C^+ =$

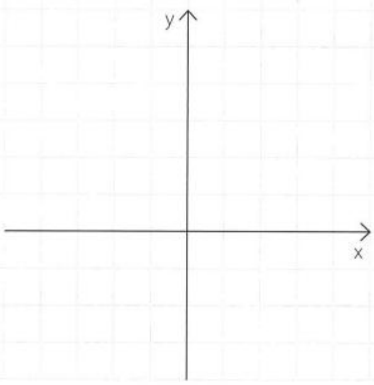
$C^- =$

8 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

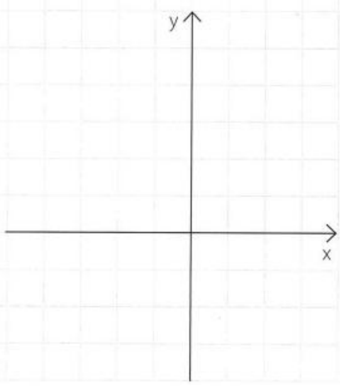
a) $f(1) = 0 \wedge f(-3) = 0 \wedge f(0) > 0$



b) $C^0 = \{-2\,;0\,;3\} \wedge f(-5) < 0 \wedge f(1) < 0$



c) $f(-4) = 0 \wedge f(0) = 0 \wedge C^- = \varnothing$



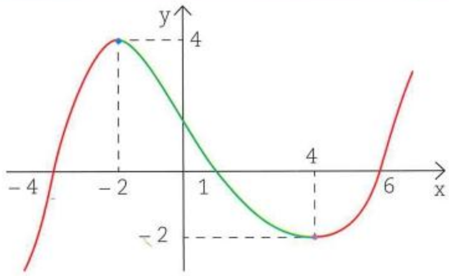
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Teoría

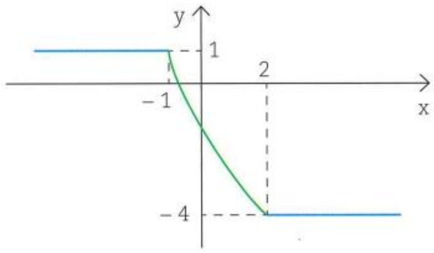
Si a medida que los valores de x aumentan, el valor de la función aumenta, entonces, la función **crece**; pero si disminuyen, entonces, la función **decrece**.
En $\mathbf{x = -2}$ y $\mathbf{x = 4}$, la función no crece ni decrece. Los puntos $(-2\,;4)$ y $(4\,;-2)$ se denominan **máximo** y **mínimo relativo**, respectivamente.

Crecimiento: $(-\infty\,;-2)\cup(4\,;+\infty)$.

Decrecimiento: $(-2\,;\,4)$.



Cuando al aumentar los valores de x, los valores de la función no varían, la función no crece ni decrece, sino que se mantiene **constante**.
$f(-3) = f(-2) = f(-1) = 1$
$f(2) = f(3) = f(4) = -4$
La función es constante en: $(-\infty\,;-1)\cup(2\,;+\infty)$.

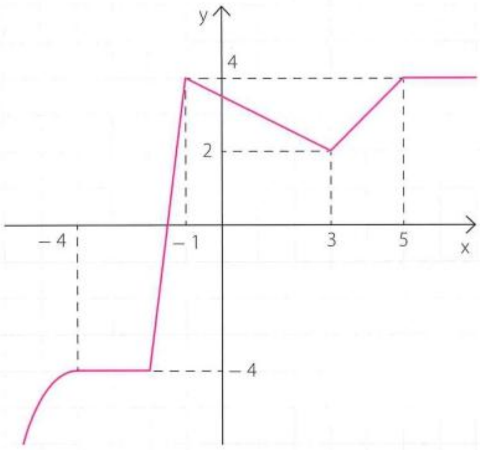


9 **Observar el gráfico y escribir.**

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

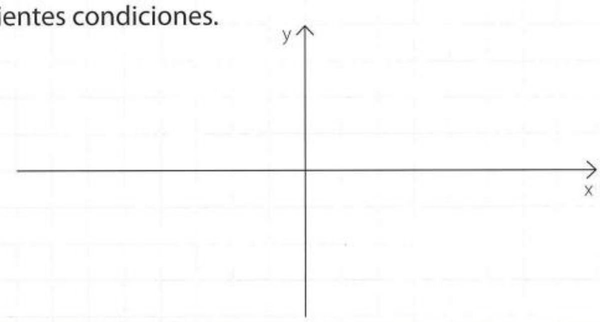
b) El o los intervalos donde es constante.

c) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.



10 **Graficar una función que cumpla con las siguientes condiciones.**

- Crecimiento: $(-\infty\,;-5)\cup(2\,;+\infty)$
- Es constante: $(-5\,;-2)$
- $f(-7) = f(0) = f(5) = 0$
- Mínimo relativo en $(2\,;-2)$



Desafío

11 **Indicar cuáles de las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.**

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = 2$

c) $f(x) = 1 - x$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

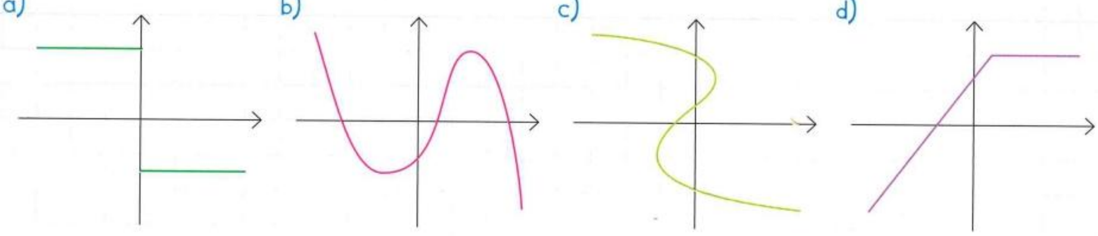
e) $f(x) = x^3$

f) $f(x) = -7$

Repaso

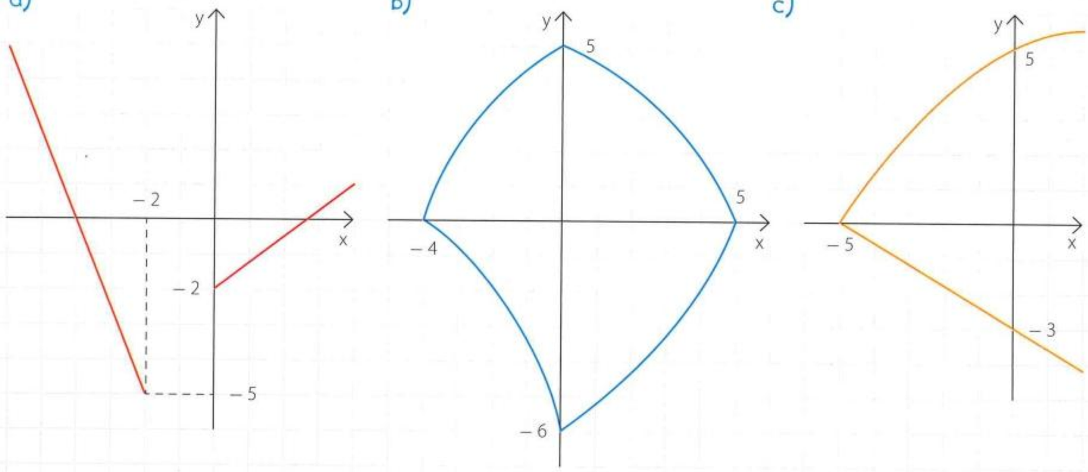
12 Indicar si las siguientes relaciones de R: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones y justificar.

a) b) c) d)

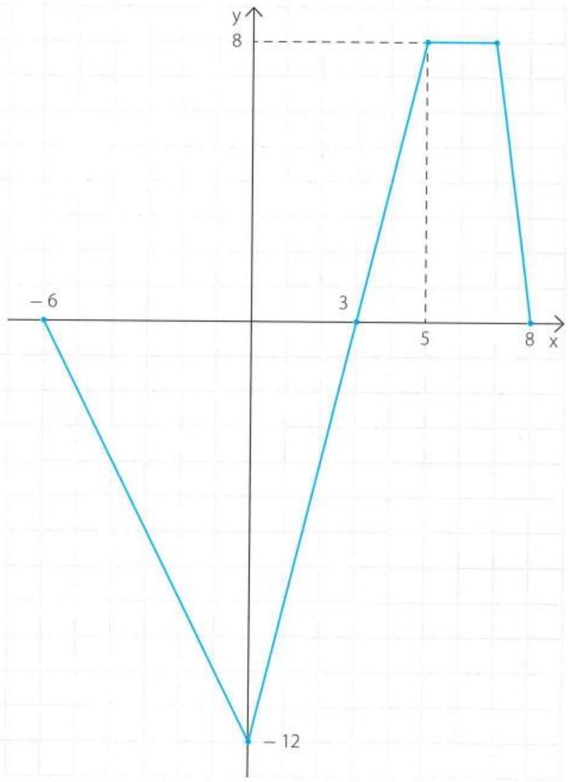


13 Escribir un dominio y una imagen adecuados para que las siguientes relaciones sean funciones.

a) b) c)



14 Observar el gráfico de la función y responder.



a) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función?

b) ¿Cuáles son las raíces?

c) ¿Cuál es la imagen de – 2?

d) ¿Y cuál la de 0?

e) ¿Cuáles son las preimágenes de – 4?

f) ¿En qué intervalo la función vale 8?

Colocar >, < o = según corresponda.

g) f(2) ☐ f(4)

h) f(6) ☐ f(7)

i) f(– 1) ☐ f(– 2)

j) f(1) ☐ f(5)

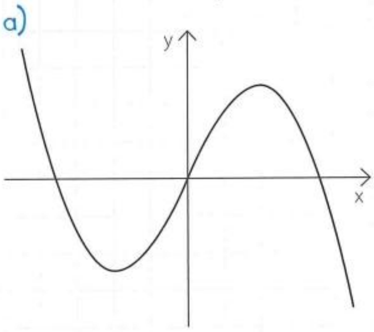
k) f(8) ☐ f(– 6)

l) f(– 3) ☐ f(1)

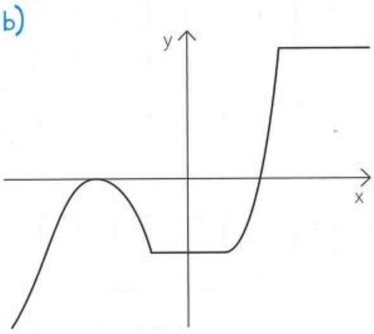
15 Marcar sobre el eje x.

- Con **rojo**: los intervalos de positividad.
- Con **verde**: los intervalos de negatividad.
- Con **azul**: el conjunto de ceros o raíces.

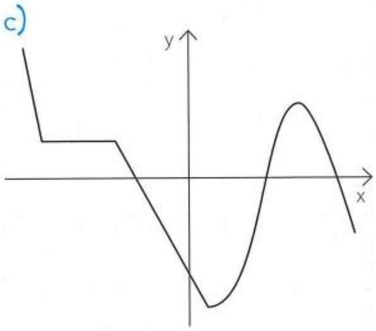
a)



b)

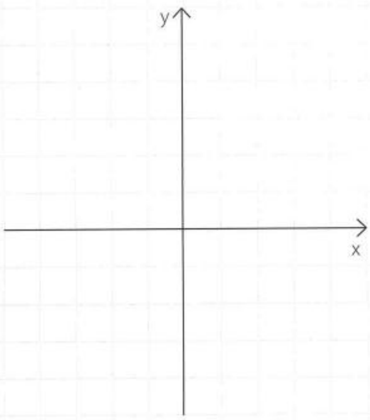


c)

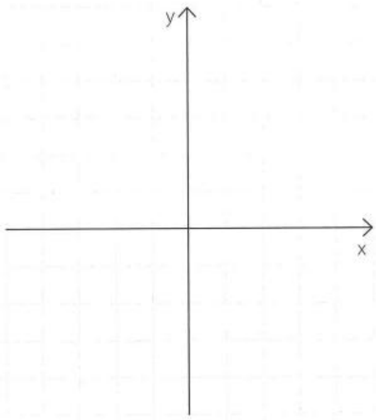


16 Realizar el gráfico de una función que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso.

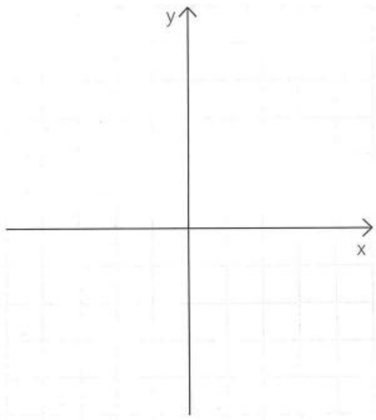
a) Es constante en $(-\infty ; -1)$; decreciente en $(-1 ; 3)$ y tiene un mínimo relativo en $(3 ; -4)$.



b) Es constante en $(-2 ; 0)$ y es creciente en $(-\infty ; -2) \cup (3 ; +\infty)$.



c) Tiene máximos relativos en $(-4 ; 1)$ y $(3 ; 0)$ y $f(0) = -3$.



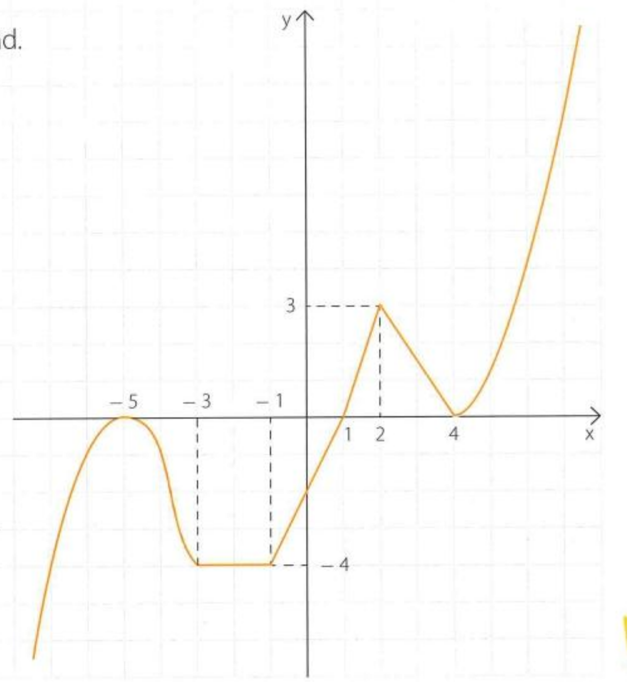
17 Observar el gráfico y escribir.

a) Los conjuntos de ceros, positividad y negatividad.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) El o los intervalos donde es constante.

d) El o los puntos máximos y/o mínimos relativos.

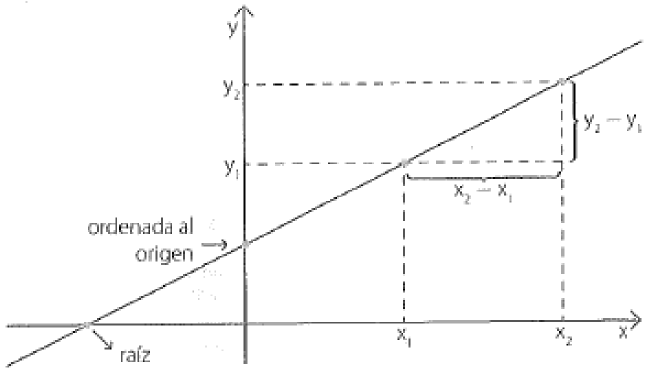


Unidad I: Función Afin. Rectas paralelas y perpendiculares

Teoría

Una función cuya fórmula es $\mathbf{y = ax + b}$ es una función afín, y su gráfica es una **recta** en el plano.
Los coeficientes a y b representan la **pendiente** y la **ordenada al origen** de la recta, respectivamente.

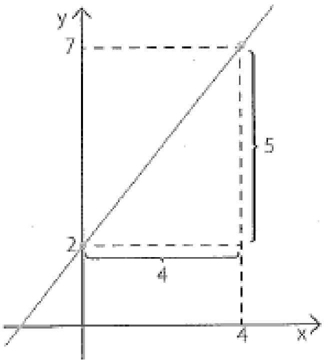
$$y = \underbrace{a}_{\text{pendiente}}x + b \rightarrow \text{ordenada al origen}$$



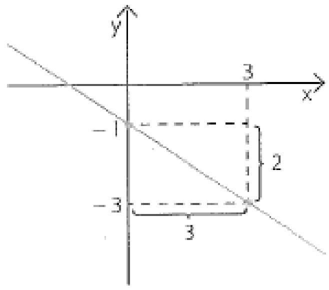
- La ordenada al origen **b** es el valor donde la recta corta al eje y ($x = 0$).
  $y = a \cdot 0 + b = b$
- La pendiente **a** es el cociente entre la variación de la variable dependiente y la independiente.
  $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Para representar una recta, se consideran las variaciones de las variables a partir de la ordenada al origen.

a) $y = \frac{5}{4}x + 2$



b) $y = -\frac{2}{3}x - 1$



En algunos textos también se tiene en cuenta el ángulo de inclinación de la recta, es decir el ángulo que forma la recta con el eje x. Generalmente se denota a ese ángulo con la letra griega α (alpha) y la fórmula para la pendiente es la siguiente:

$\mathbf{a} = \boldsymbol{tan\,\hat{\alpha}}$ (a veces hay que hallar el ángulo de inclinación, para eso la fórmula sería $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{tan^{-1}}(\mathbf{a})$)

En algunos autores consideran la pendiente con la letra $\boldsymbol{m}$ y en otros con la letra $\boldsymbol{a}$, por esto es lo mismo que nosotros tengamos la expresión $y = mx + b$ o bien $y = ax + b$, lo importante es saber que <u>la pendiente es el número que está multiplicando a la $\boldsymbol{x}$.</u>

Para reconocer la pendiente y la ordenada es importante que despejes la variable y como se muestra en los siguientes ejemplos:

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y &= -x + 2 \end{aligned}$$
$$\begin{cases} m = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ -y &= -3x + 1 \\ y &= 3x - 1 \end{aligned}$$
$$\begin{cases} m = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y &= -5 \\ 2y &= -x - 5 \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$
$$\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

d)
$$\begin{aligned} 3y - 2x &= 7 \\ 3y &= 2x + 7 \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$
$$\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

OBSERVACIONES A TENER EN CUENTA:

- La gráfica de la función afín es una recta que no necesariamente pasa por el origen de coordenadas
- Posee intersecciones con ambos ejes coordenados
- La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje x, si es positiva es "creciente" y si es negativa será "decreciente"

- La ordenada al origen es el punto de intersección con el eje y
- Un punto (x,y) pertenece a una función afin si verifica la ecuación de la mencionada función y pertenece a la gráfica si está sobre la recta correspondiente.
- Se denomina ***función lineal***, a una ***función afín*** cuyo término “b” (ordenada al origen o término independiente) sea igual a CERO. $f(x) = y = ax$

Ejercitación

1 Unir cada punto con la recta a la cual pertenece.

a) $(-3\,;\,2)$

b) $(-2\,;\,4)$

c) $(6\,;\,-1)$

d) $(-4\,;\,-4)$

e) $(-1\,;\,-1)$

f) $(3\,;\,-5)$

$y = \frac{3}{2}x + 2$

$y = 5x + 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$

$y = -2x - 4$

$y = -3x + 4$

$y = -\frac{4}{3}x - 1$

$y = \frac{2}{3}x - 5$

2 Hallar la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

a) $(5\,;\,7)$ y $(2\,;\,1)$ b) $(-2\,;\,1)$ y $(6\,;\,-7)$ c) $(1\,;\,-6)$ y $(-5\,;\,2)$

3 Hallar la ordenada al origen, la raíz y el ángulo de inclinación de las siguientes rectas.

a) $y = 3x + 1$ b) $2y = -x + 4$ c) $x - y = 5$ d) $4x + 2y = -6$

4 Hallar la ecuación explícita de las siguientes rectas.

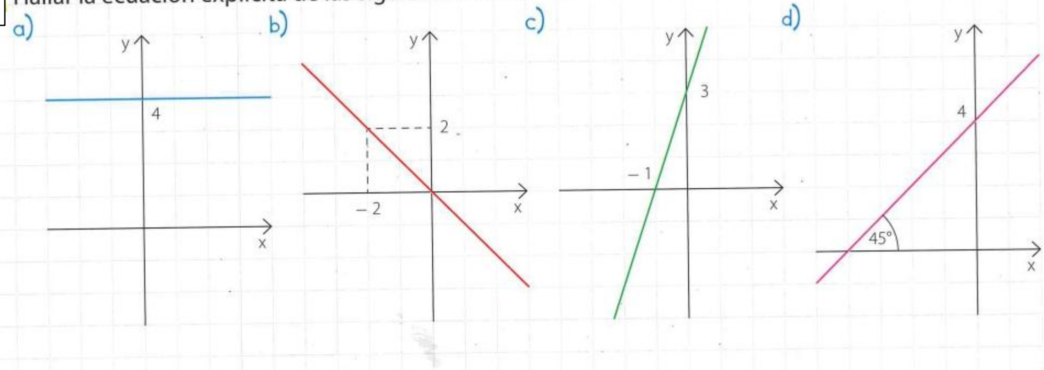


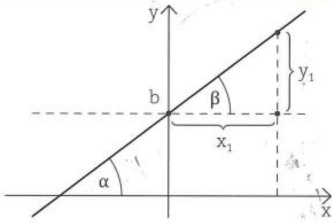
Gráfico de una función lineal

Teoría

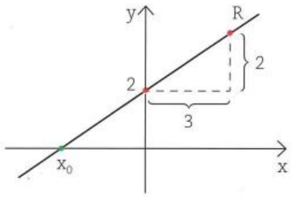
Para graficar una función lineal a partir de su ecuación explícita $y = \mathbf{m}x + \mathbf{b}$, se utiliza la construcción de la figura.

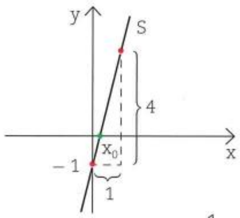
El ángulo de inclinación $\hat{\alpha}$ es igual al ángulo $\hat{\beta}$ por ser correspondientes entre paralelas.

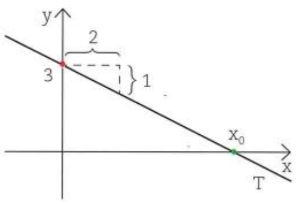
$$m = \operatorname{tg}\hat{\alpha} = \operatorname{tg}\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$$



a) $R: y = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow m = \frac{2}{3}\begin{matrix}\rightarrow y_1\\ \rightarrow x_1\end{matrix}$ b) $S: y = 4x - 1 \Rightarrow m = \frac{4}{1}\begin{matrix}\rightarrow y_1\\ \rightarrow x_1\end{matrix}$ c) $T: y = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}\begin{matrix}\rightarrow y_1\\ \rightarrow x_1\end{matrix}$



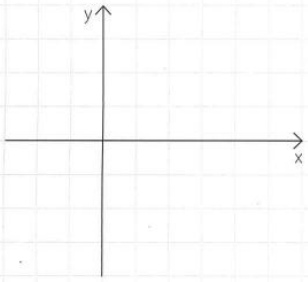


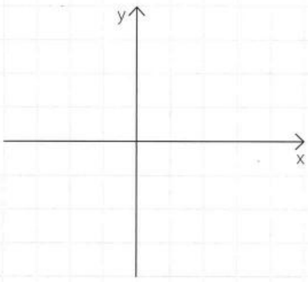


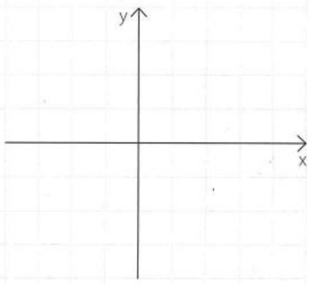
$\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 = -3$ $4x - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}$ $-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \,.\, (-2) \Rightarrow x_0 = 6$

20 Trazar la recta a partir de su ordenada al origen y de su pendiente. Hallar analíticamente la raíz.

a) $y = \frac{2}{5}x - 1$ b) $y = -\frac{4}{3}x + 2$ c) $y = -2x - 1$

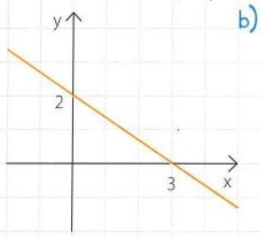




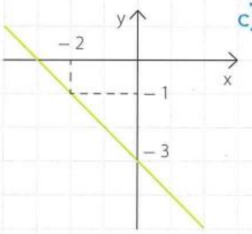


21 Escribir la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas.

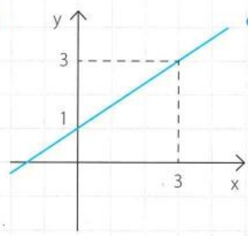
a)



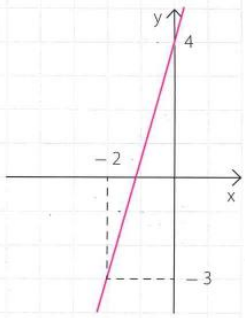
b)



c)



d)



Desafío

22 Hallar la ecuación explícita de la recta que tiene una inclinación de 45° y pasa por el punto (2 ; 5).

<u>**Ejercicio**</u>: Graficar cada recta a partir de la pendiente y la ordenada al origen

a) $y = 3x - 5$

b) $y = \frac{1}{4}x + 3$

c) $y = -\frac{5}{3}x + 1$

d) $y = 2x - 3$

e) $y = \frac{3}{4}x - 1$

f) $y = -2$

g) $2x + 3y = 4$

h) $y + 5 = 0$

i) $4x - y = -2$

Otra forma de representar la función afín es tener en cuenta **las intersecciones con los ejes coordenados**, teniendo en cuenta lo siguiente

Intersecciones con el eje x→ $y = 0$
Intersección con el eje y→ $x = 0$

lean bien el ejemplo que está a continuación:

Ejemplo: Sea $y = -5x + 3$ una función afín,
a) la ntersección con el eje x→ $y = 0$, reemplazando en la ecuación original y despejando la otra variable tenemos

$$0 = -5x + 3$$
$$-3 = -5x$$
$$3/5 = x$$

entonces el punto $(3/5; 0)$ es la intersección con el eje x

b) la intersección con el eje y→ $x = 0$, de la misma manera que antes reemplazamos en la ecuación original y despejamos la otra variable

$$y = -5.0 + 3$$
$$y = 3 \; entonces, el \; punto \; es \; (0; 3)$$

Entonces para graficar se marcan esos dos puntos en el sistema de ejes cartesianos y se traza la recta que pasa por ellos.

Además de graficar teniendo ya la fórmula puede suceder que tengamos los datos y necesitemos ***hallar la ecuación de la recta***, por lo cual tendremos que calcular la pendiente y/o la ordenada dependiendo de los datos con los que contemos.

Ecuación de la recta

La gráfica de cualquier función de primer grado es **una recta**, donde cada uno de los puntos de la misma tiene un par de coordenadas que verifican la ecuación y son su solución.

Dado que dos puntos determinan una recta, podemos representar gráficamente una función de primer grado encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. A menudo los puntos más fáciles de encontrar son la ordenada al origen y la pendiente.

En nuestro ejemplo, $y = 2x - 3$ para encontrar la **ordenada al origen** se hace $x = 0$ y se resuelve para y.

Para encontrar **la pendiente** de la recta marcamos dos puntos y hacemos el cociente entre la variación de la variable dependiente y y la variación de la variable independiente x .

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad p_1 = (x_1 ; y_1) \quad p_2 = (x_2 ; y_2)$$

$$a = \frac{-1 + 3}{1 - 0} \qquad p_1 = (0 ; -3) \quad p_2 = (1 ; -1)$$

$$a = \frac{2}{1}$$

Para tener en cuenta:

El punto (o ; b) es el punto de intersección de la recta con el eje y, por esta razón al número b se lo llama ordenada al origen.

Podemos encontrar 3 casos para hallar la ecuación de la recta según los datos que tengamos, a saber:

1. Caso I

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo la pendiente y el punto de intersección con el eje de las ordenadas.

Cuando se conoce el valor de la pendiente de una recta y el valor del punto de intersección con el eje de las ordenadas, basta sustituir esos valores por m y b respectivamente, en la ecuación general de las funciones lineales (y = mx + b), para obtener la ecuación de la recta particular.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a -8 y cuyo punto de intersección con los ejes de las ordenadas esta dado por 7.

Recuerde que la ecuación de la recta es de la forma y = mx + b; como m = -8 y b = 7, entonces, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene: y = -8x + 7.

$y = ax + b$ o bien puede aparecer que $y = mx + b$
(lo importante es saber que el número que multiplica a la x o a la variable independiente es la pendiente -sea a, m o bien otra letra; y el término independiente siempre será la ordenada al origen)

2. Caso II

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo la pendiente y uno de sus puntos.

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta cuya pendiente es igual a 3 y se contiene al punto (2,7).

$a = 3$ por lo cual reemplazando en la forma vista de la ecuación de la recta

$$y = 3x + b$$

Si contiene al punto (2; 7) entonces; x=2 y y=7, reemplazamos

$$7 = 3.2 + b$$
$$7 - 6 = b$$
$$1 = b$$

Así, la ecuación de la recta que pasa por el punto (2;7) y cuya pendiente es 3, es ***y=3x+1***

3. caso III

Cálculo de la ecuación de una recta conociendo dos puntos que pertenecen a ella.

Ejemplo:

Calcular la ecuación de la recta que contiene los puntos (3,5) y (7,13).

1) Calculamos m:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$
$$m = \frac{13-5}{7-3}$$

$$m = \frac{8}{4}$$
$$m = 2$$

2) Como en este caso m = 2, y tomando el punto (3,5) calculemos b.

$$b = y - mx$$
$$b = 5 - (2 * 3)$$
$$b = 5 - 6$$
$$b = -1$$

3) Sustituyendo los de m y b encontrados, en la ecuación general de la recta, se obtiene: y = 2x – 1, que es la ecuación de la recta buscada.

Ejercitación

1) Hallar la ecuación de la recta teniendo en cuenta los siguientes datos:

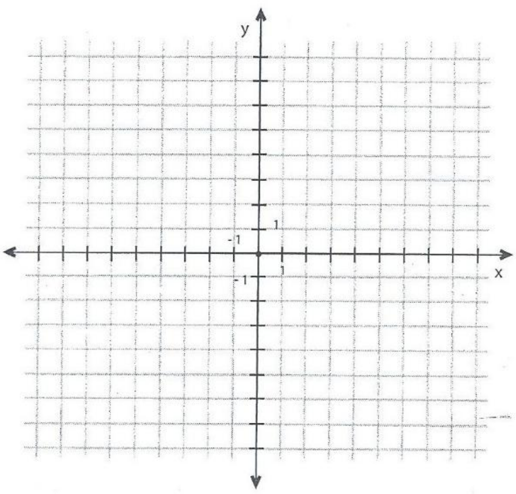
a) pasa por los puntos (2;1) y (-1;7)
b) tiene pendiente (-3/4) y pasa por el punto (2;-2)
c) pasa por el punto (-1;3) y tiene pendiente 2
d) pasa por los puntos (5;-1) y (-10;-7)
e) tiene pendiente 3 y ordenada al origen -4
f) pasa por los puntos (0;3) y (5/2;0)

2) Determinar si los puntos (2;1), (3;3) y (-1;-5) están o no alineados, es decir, si pertenecen a la misma función afín

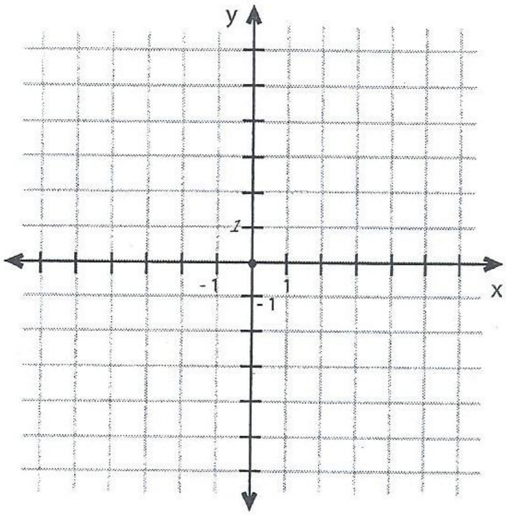
Actividades:

1- Grafiquen en ejes cartesianos por pendiente y ordenada al origen:

a) y = 3x + 1



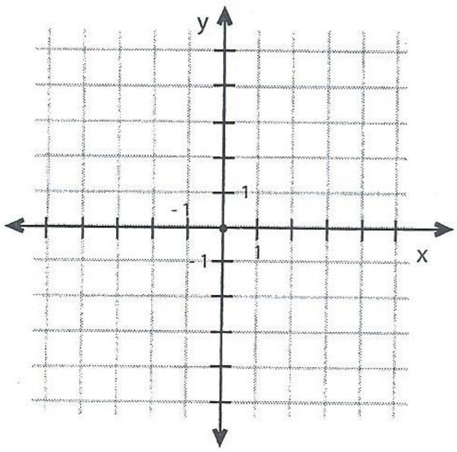
b) $y = -2x$



2- Dadas las tablas representen gráficamente en cada caso y escriban la función:

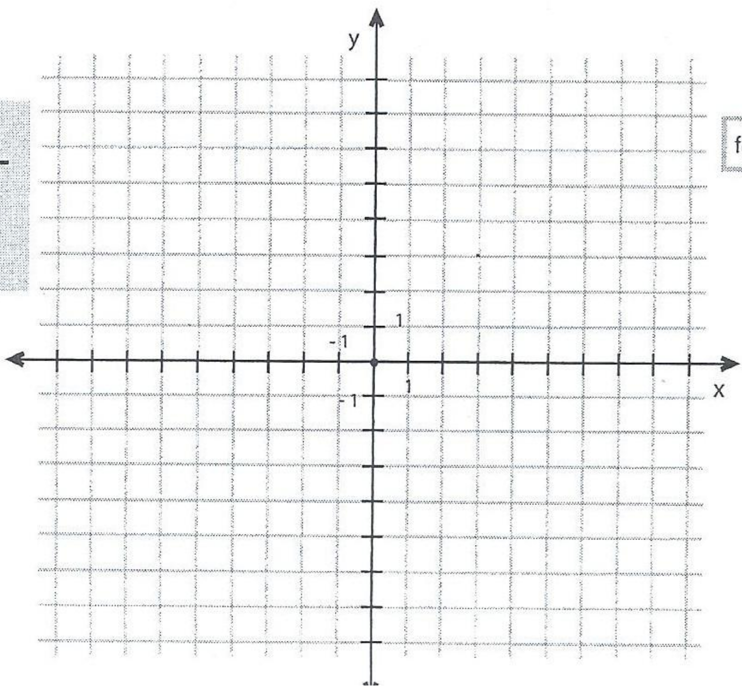
a)

x	y
0	- 2
+1	0
- 2	- 6



f(x)=

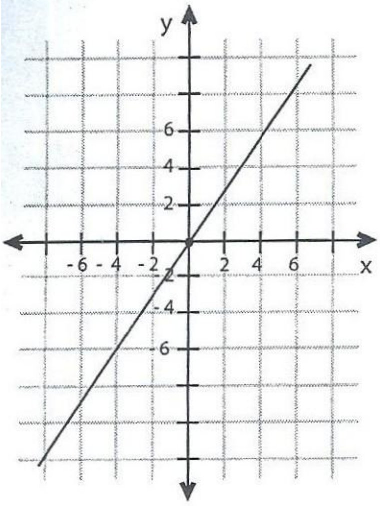
b)

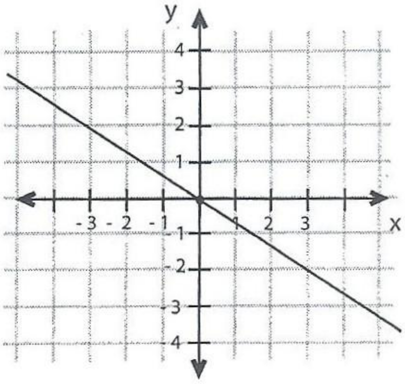


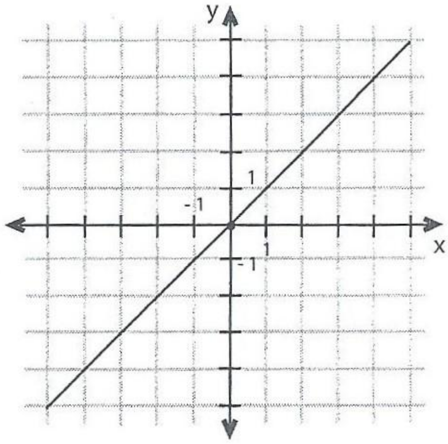
x	y
0	- 3
1	0
- 2	9

f(x)=

3- Dadas las funciones lineales representadas en los ejes cartesianos indiquen la ecuación correspondiente:







y =

y =

y =

4- Grafiquen las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos.
Indiquen la pendiente y la ordenada al origen en cada uno:

a) (1 ; 4) y (5 ; 6) b) (- 2 ; 0) y (0 ; 5) c) (0 ; 0) y (5 ; 2)

5- Completen teniendo en cuenta que son funciones lineales:

Función	**Pendiente**	**Ordenada al origen**
y = ...x - 7	- 2	....
$\frac{1}{2}$ y = x + 5	....	....
y = - 3..... x	$\frac{1}{2}$	....
2x + y = - 3	....	....
2x = y + 9	....	....

6- Tracen las rectas que cumplan con las pendientes (a) y ordenadas al origen (b) de cada uno de los siguientes casos en sistemas de ejes cartesianos diferentes:

a) $a = \frac{1}{2}$; $b = 0$

b) $a = 1$; $b = -3$

c) $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{4}$

d) $a = -1$; $b = -2$

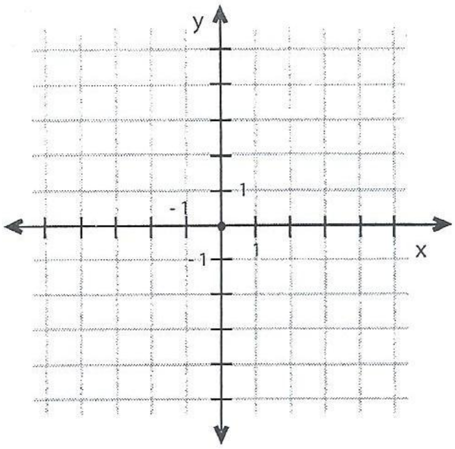
Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales.

Ejemplo:

$y = 3x - 1$ $\qquad$ $y = 3x + 7$

Grafiquen en los ejes cartesianos las ecuaciones dadas:



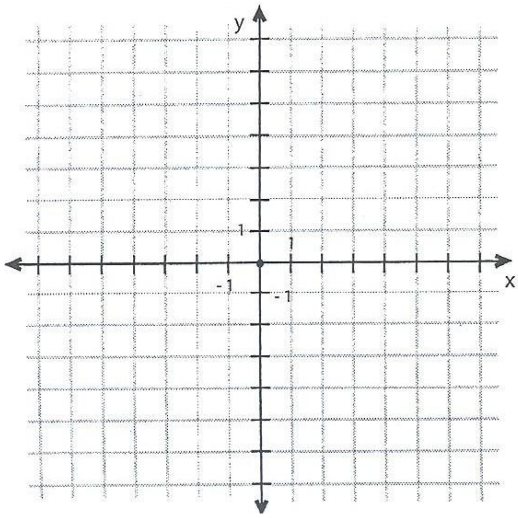
Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son inversas y opuestas, es decir, el producto de las pendientes es - 1

Ejemplo:

$y = 2x + 4$ $\qquad$ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Grafiquen en los ejes cartesianos las ecuaciones dadas:



Actividades:

1- Dada la ecuación $y = \frac{1}{3}x - 2$

a) Digan si $4y = \frac{4}{3}x - 16$ es paralela a la anterior.

b) Grafíquenlas.

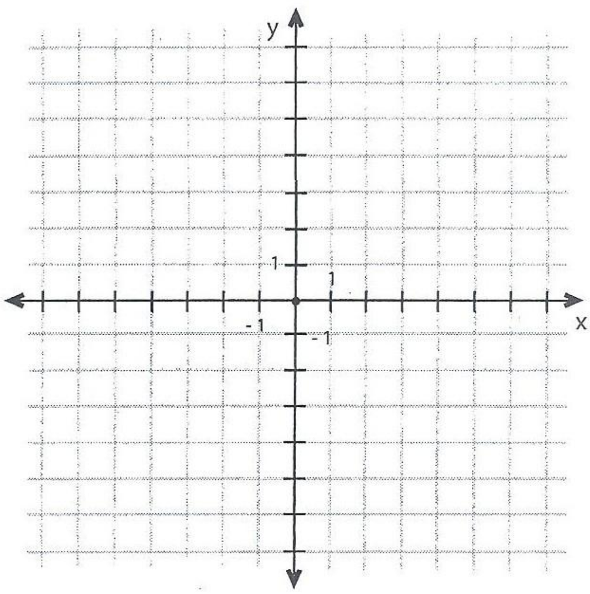
2- Dada la recta A de ecuación $y = \frac{1}{2}x + 3$ propongan otras rectas que condición indicada en cada caso:

a) recta B // A que pase por el origen de las coordenadas.

b) recta C // A con ordenada al origen igual a -2.

c) recta D $\perp$ A de ordenada al origen igual a 5.

d) Representen las cuatro rectas en el siguiente gráfico:



3- Marquen con una cruz la respuesta correcta:

A) La recta $\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$

a) corta al eje x en $-\frac{3}{2}$

b) corta al eje x en el punto 3

c) corta al eje y en el punto 3

B) Dadas las rectas $\boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{3}}$; $\boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{3}{5}}$

Indiquen si:

a) son rectas paralelas.

b) son rectas perpendiculares.

c) ninguna de las anteriores.

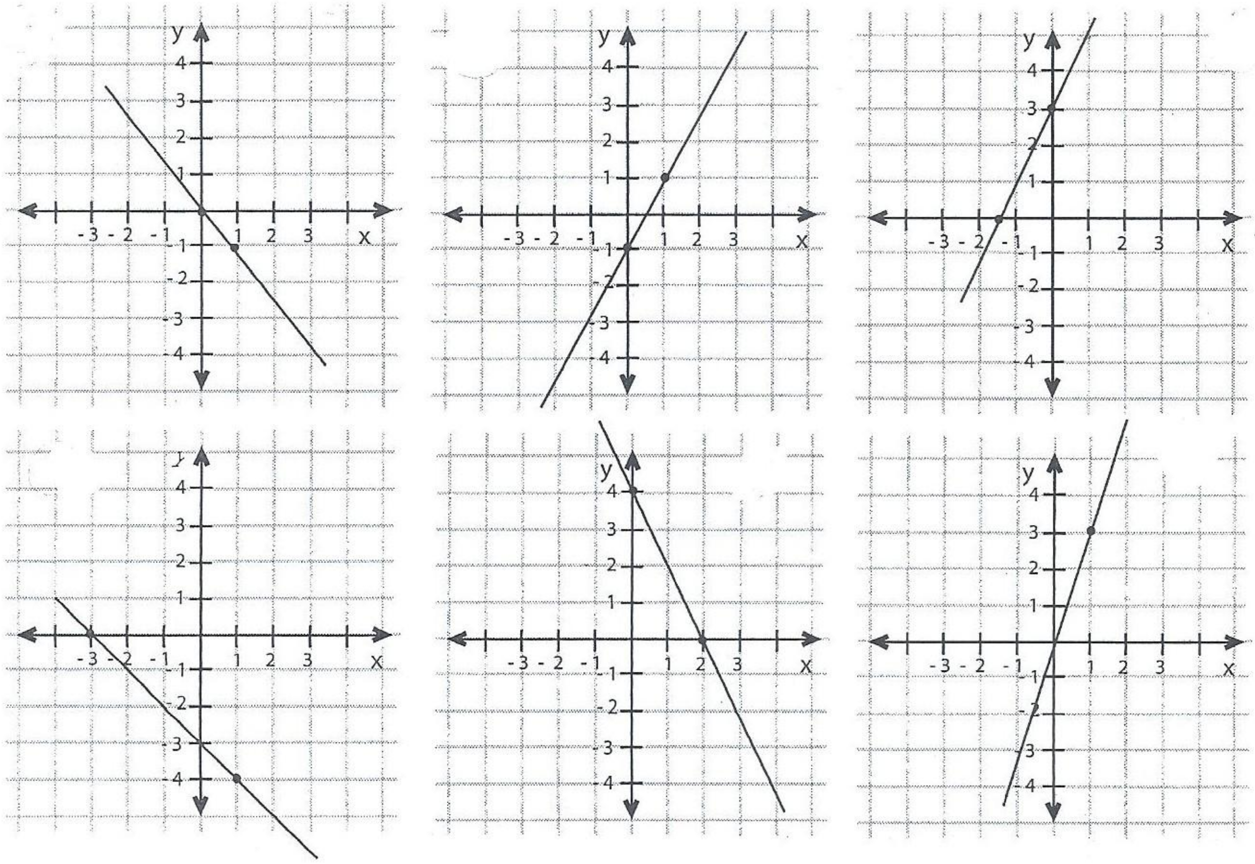
C) La pendiente de la recta que pasa por los dos puntos (2 ; 7) y (4 ; 9) es:

a) - 1 c) 1

b) $\frac{9}{11}$ d) $-\frac{9}{11}$

4- Determinen el gráfico que corresponde a cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $y = 2x + 3$
b) $y = 3x$
c) $y = -x - 3$
d) $y = 2X - 1$
e) $y = -X$
f) $y = -2X + 4$



5- Para cada uno de los tres casos dados, deduzcan la forma simplificada de la ecuación de la recta dada la pendiente (a) y la ordenada al origen (b)

1) $a = 2$, $b = -2$

2) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$

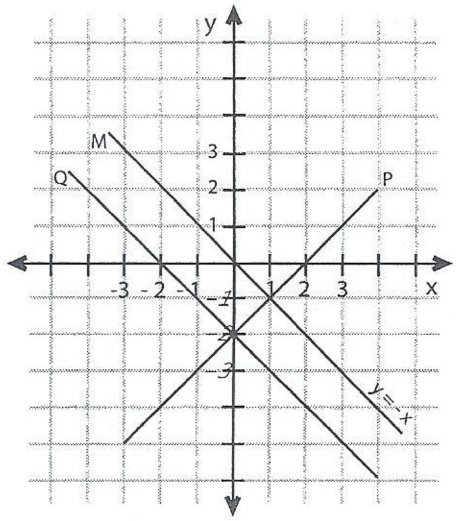
3) $a = 3$, $b = 1$

6- La ecuación de la recta que pasa por (3 ; 2) con pendiente 3 es:

a) $2x - 3y = 5$
b) $x + y = 7$
c) $3x - y = 7$
d) $4x - y = -2$

7- En el gráfico la recta M tiene por ecuación a: $\boxed{y = -x}$

Indiquen la respuesta correcta:



A) La paralela a M tiene por ecuación:

a) $y = 2x$
b) $y + 2 = -x$
c) $-x + y = -2$
d) $y = x - 2$

B) La perpendicular a M tiene por ecuación:

a) $y = x + 4$
b) $y = x - 2$
c) $y - 2 = -x$
d) $y = \frac{1}{2}x - 2$

8- Hallen la ecuación de la recta que pasa por (1; 4) y es paralela a la recta $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

9 **Escriban // o ⊥ según corresponda.**

a. $3y = x \; \square \; (y + 1) = -3 . (x - 1)$
b. $y - 1 = \frac{2}{3}x \; \square \; y = -\frac{3}{2}x - 1$
c. $y = 3x - 1 \; \square \; y - 2 = 3 . (x + 1)$
d. $y = -x \; \square \; \frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1$
e. $\frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 1 \; \square \; (y + 1) = \frac{2}{3} \cdot (x - 3)$
f. $(y + 1) = 2 . (x - 3) \; \square \; \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1$
g. $y - 4 = -3 . (x + 1) \; \square \; y = \frac{1}{3}x + 7$
h. $\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}x = 1 \; \square \; y - 5 = \frac{2}{3} \cdot (x - 6)$

10) Completen la tabla teniendo en cuenta el punto indicado

Ecuación de la recta	Punto a	Recta paralela que pasa por a	Recta perpendicular que pasa por a
$y = 3x + 2$	**(4;1)**		
$-\frac{1}{8}x + y - 3 = 0$	**(2;0)**		
$-y = 5x$	**(-2;-1)**		
$\frac{x}{2} = \frac{y+3}{8}$	**(6;-2)**		
$y + 1 = \frac{1}{3}x$	**(-3;1)**		

11) Hallar la ecuación de las rectas que cumplen las siguientes condiciones

a) A: tiene pendientes 3 y pasa por (2;-5)
b) B: es paralela a $y = 3 - 2x$ y pasa por (-3;1)
c) C: es perpendicular a $y = -3x + 1$ y pasa por (-4;-1)
d) D: pasa por (5;-4) y (1;4)

Unidad II: Sistema de Ecuaciones Lineales

41. a) Al sumar dos números el resultado es 78. Se sabe que su diferencia es 12. ¿Cuáles son esos números?

b) Para resolver este problema cuatro alumnos escribieron estas ecuaciones:

Julián	Mariano	Carolina	Sofía
$x + y = 78$	$x + y = 78$	$x + y = 78$	$x = 78 - y$
$x - y = 12$	$y = 12 - x$	$x = 12 + y$	$x = 12 + y$

¿Es cierto que todas las propuestas representan este problema? Explicá cómo se dan cuenta.

42. A un congreso asistieron 700 personas. La cantidad de mujeres es el doble de la de hombres, más 10. ¿Cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron al congreso?

Cuando se buscan soluciones de una ecuación que además deben ser soluciones de otras, se dice que se buscan soluciones de un sistema de ecuaciones. Si el sistema tiene dos ecuaciones de dos variables, el conjunto solución está formado por los pares de números que hacen que las dos igualdades sean ciertas.

Dos sistemas son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

A los sistemas de ecuaciones se los acostumbra iniciar con una llave que los contiene.

Por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 78 \\ x - y = 12 \end{cases}$

43. a) ¿Cuál o cuáles de estos sistemas podrían representar al problema que se da a continuación? Justificá tu respuesta.

En una confitería se venden pastelitos de frutilla, a \$ 2 cada uno, y pastelitos de chocolate, a \$ 3 cada uno. Daniela llevó 13 pasteles surtidos y gastó \$ 34. ¿Cuántos pasteles de cada clase llevó?

$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 13 \\ x + y = 34 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 34 \\ x + y = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 34 \\ y = 13 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \cdot x + 3 \cdot y = 34 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y = 26 \end{cases}$ $\begin{cases} 6 \cdot x + 9 \cdot y = 102 \\ x + y = 13 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot x = 34 - 3 \cdot y \\ 2 \cdot x = 13 - y \end{cases}$

b) ¿Es cierto que el par (5; 8) es solución de cualquiera de los sistemas que elegiste en el ítem **a.**?

El conjunto de dos ecuaciones que contienen las mismas variables se llama **sistema de dos ecuaciones con dos variables.** El conjunto solución de un sistema se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

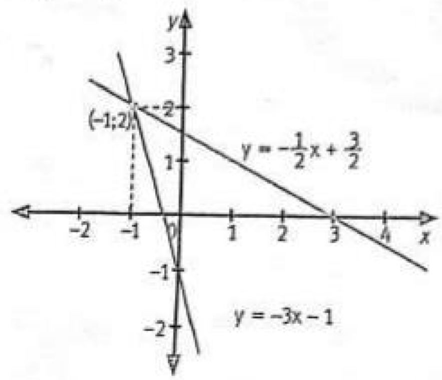
Una forma de encontrar soluciones a un sistema es representar gráficamente las ecuaciones.

Resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales

Para **resolver gráficamente** un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistemas de ejes y hallar la intersección de ambas.

$$\begin{cases}3x+y=-1\\ x+2y=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=-3x-1\\ y_2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\end{cases}$$

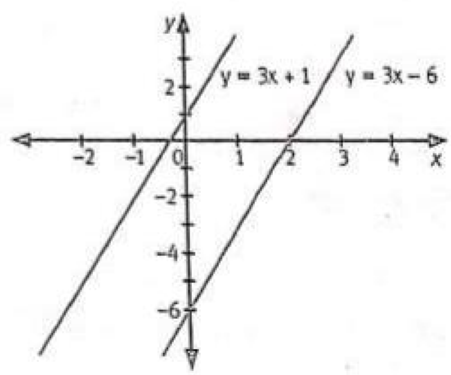
$S=\{(-1;2)\}$



Sistema compatible determinado

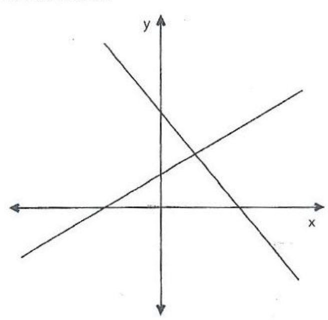
$$\begin{cases}x-\frac{1}{3}y=2\\ 3x-y=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_1=3x-6\\ y_2=3x+1\end{cases}$$

$S=\varnothing$

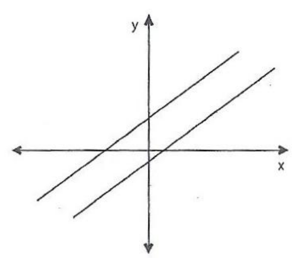


Sistema incompatible

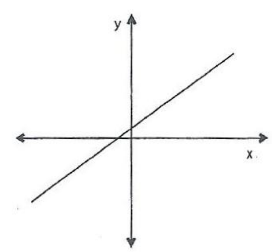
Las gráficas de dos ecuaciones lineales en dos variables pueden ser: dos rectas que se cortan, dos rectas paralelas o una misma recta:



Dos rectas que se cortan.
Solución única.
Sistema
compatible determinado.



Rectas paralelas.
No hay solución.
Sistema
Incompatible.



Una misma línea recta.
Una infinidad de soluciones.
Sistema
Compatible indeterminado.

Para tener en cuenta:

Sistema de ecuaciones → **Compatible** (tiene solución) → ▪ **Determinado** (una solución); ▪ **Indeterminado** (infinitas soluciones)

Sistema de ecuaciones → **Incompatible** (ninguna solución)

Ejercicios

1) Resuelvan gráficamente cada uno de los siguientes sistemas y clasifiquen.

1. $\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x - y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

2) **Analizar las pendientes de las rectas de cada sistema y unir con su clasificación.**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{x + 6}{2} \\ 2y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3y = x - 9 \\ y + 3x = 7 \end{cases}$

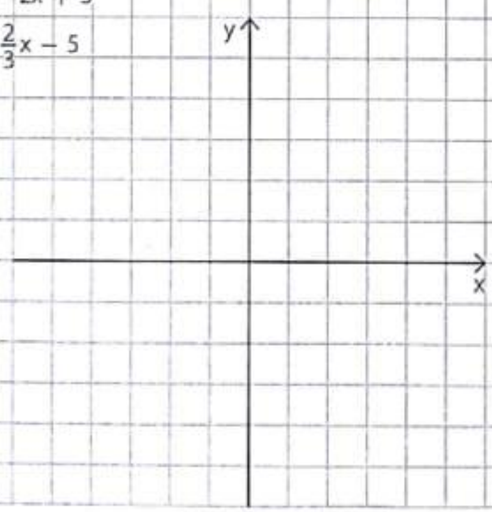
e) $\begin{cases} 5(1 + y) = x \\ y = \dfrac{3 + x}{5} \end{cases}$

COMPATIBLE DETERMINADO

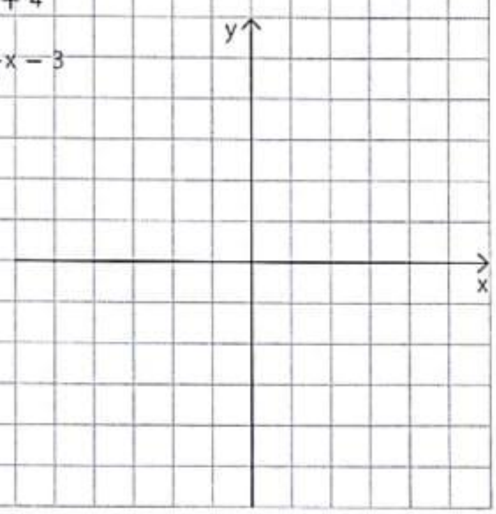
INCOMPATIBLE

3) **Trazar cada recta del sistema a partir de su ordenada al origen y pendiente, y hallar la solución gráfica.**

a) $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{2}{3}x - 5 \end{cases}$



b) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 4 \\ y = -\frac{1}{4}x - 3 \end{cases}$



Existen varios métodos para resolver sistemas de ecuaciones.
Conocer distintos procedimientos permitirá optar por el que juzguen más apropiado y sencillo.

Método de sustitución

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$$

$x = 8 - 2y$ (despejo una de las cuatro incógnitas)

$8 - 2y - 4y = -10$ (sustituyo en la otra ecuación)

$-6y = -18$

$\boxed{y = 3}$

Cálculo de x :

$x + 2y = 8$

$x + 2 . 3 = 8$

$x = 8 - 6$

$\boxed{x = 2}$

Método de igualación

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 4y = -10 \end{cases}$$

(despejo la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego igualo)

$x = 8 - 2y$

$x = -10 + 4y$

$8 - 2y = -10 + 4y$

$8 + 10 = 4y + 2y$

$18 = 6y$

$y = \frac{18}{6}$

$\boxed{y = 3}$

Cálculo de x:

$x + 2y = 8$

$x + 2 . 3 = 8$

$x = 8 - 6$

$\boxed{x = 2}$

Verificación:

$$\begin{cases} 2 + 2 . 3 = 8 \\ 2 - 4 . 3 = -10 \end{cases}$$

Ejercitación

6 Resolver aplicando el método de igualación.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + 2x = 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

7 Resolver aplicando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - x = 3 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

Otro método para resolver sistemas de ecuaciones es el de **reducción por sumas y restas**.

Para aplicar este método hay que llevar ambas ecuaciones a la forma **ax + by = c**.
La idea es igualar los coeficientes de una de las incógnitas (o sus valores absolutos) para luego eliminarla, mediante una suma o una resta entre las ecuaciones resultantes, y así obtener una ecuación de una sola incógnita. Mirá este ejemplo.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por el coeficiente que tiene x en la segunda, y la segunda por el coeficiente que tiene x en la primera.

$3 \cdot (2x - 3y = 3) \longrightarrow 6x - 9y = 9$
$2 \cdot (3x + y = 10) \longrightarrow 6x + 2y = 20$

Como en las dos ecuaciones aparece el término "2x", al restarlas miembro a miembro la x desaparece.

Entonces,

$$\begin{array}{r} \cancel{6x} - 9y = 9 \\ - \quad \cancel{6x} + 2y = 20 \\ \hline -11y = -11 \end{array}$$

por lo que $y = 1$.

Podés averiguar el valor de x reemplazando el valor de y en cualquiera de las ecuaciones del sistema. Así, resulta que $3 \cdot x + 1 = 10$, con lo que $x = 3$.

Actividades

1- Resuelvan por el método que prefieran:

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 13 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y + x = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2 = 2y \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$

2- Determinen gráficamente si el sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones:

$\begin{cases} y - x = 3 \\ 2y - 2x = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} y = x + 3 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 1 = y \\ x = y - 4 \end{cases}$

3- Resuelvan los siguientes problemas.

a) La suma de dos números es - 42. El primero de ellos menos el segundo es 52. Calcular esos números.

b) La diferencia entre dos números es 16. Tres veces el mayor de ellos es nueve veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números?

c) En una semana un comercio vendió 20 manteles. Los blancos costaban $12 cada uno y los estampados $18 cada uno. En total las ventas fueron de $288. ¿Cuántos manteles de cada clase se vendieron?

d) Hallar dos números sabiendo que su suma es - 1 y que el triplo de su diferencia es 5.

e) Determinar dos números que cumplan la siguiente condición: El mayor sea el doble del menor más 16, la suma entre $\frac{1}{4}$ del mayor y $\frac{1}{2}$ del menor sea 2.

f) Un juego de jardinería y 8 pares de guantes para jardinero cuestan $41. Un juego para jardinería y 12 pares de guantes de jardinero cuestan $ 57. ¿Cuánto cuesta cada par de guantes?

Otros problemas de repaso:

9 **Plantear el sistema y resolver.**

a) El doble de la suma entre dos números es treinta y seis, y su diferencia es cuatro. ¿De qué números se trata?

b) La diferencia entre dos números es siete. Si el doble del menor supera en uno al mayor, ¿cuáles son los números?

c) El perímetro de un rectángulo es 58 cm y la base supera a la altura en 5 cm. ¿Cuál es la superficie del rectángulo?

d) La diferencia entre la edad de Pablo y la de Matías es 25 años. Si en 5 años la edad de Pablo será el doble que la de Matías, ¿qué edad tiene cada uno?

e) En un corral hay 40 animales entre vacas y pollos. Si se cuentan 122 patas, ¿cuántas vacas y pollos hay en el corral?

f) En una alcancía hay 50 monedas y un total de $ 8. Si sólo hay monedas de $ 0,10 y $ 0,25, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la alcancía?

Para pensar y resolver

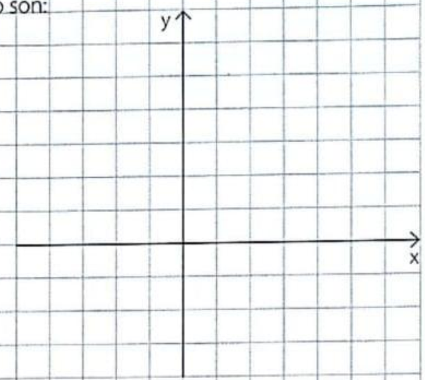
10 **Plantear el sistema y resolver.**

La suma de las cifras de un número de dos cifras es catorce y si, se invierten éstas, la diferencia entre los dos números es treinta y seis. ¿De qué número se trata?

49 Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados de un triángulo son:

$$\begin{cases} A: y = \frac{1}{2}x + 3 \\ B: y = \frac{3}{2}x - 3 \\ C: y = \frac{1}{4}x + 2 \end{cases}$$

Trazar las rectas y hallar el triángulo.
Escribir los vértices del triángulo.



50 **Resolver analíticamente los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ y - x = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 9 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x + y}{3} = 2 \\ \frac{x - y}{7} = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}y = 4 \\ \frac{x - y}{4} = 1 \end{cases}$

51 **Hallar el par de números que cumple cada una de las siguientes condiciones.**

a) Su razón es tres y la diferencia entre la mitad del mayor y el menor es dos.

b) La tercera parte de su suma es seis y uno es cuatro unidades mayor que el otro.

c) Su diferencia es quince y el triple del menor supera en cinco unidades al mayor.

d) Uno es la cuarta parte del otro y la mitad de su suma es treinta.

Para pensar y resolver

52 **Hallar el valor de a para que el sistema sea incompatible.**

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ ax + 5y = 1 \end{cases}$$

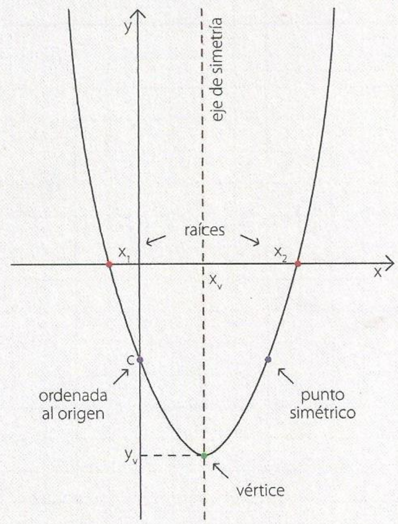
Unidad III: Función Cuadrática

Función cuadrática

Teoría

Una función cuya fórmula es $y = ax^2 + bx + c$ es una función cuadrática, y su gráfica es una **parábola**. Para realizar el gráfico de una parábola, se deben calcular: sus **raíces**, su **eje de simetría**, su **vértice** y su **ordenada al origen**.

- Raíces: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$
- Vértice: $(x_v\ ;\ y_v) \begin{cases} x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a} \\ y_v = ax_v^2 + bx_v + c \end{cases}$
- Eje de simetría: $x = x_v$
- Ordenada al origen: en $x = 0 \Rightarrow y = c$



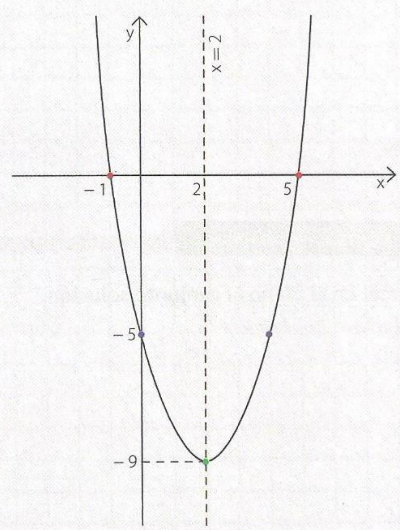
Ejemplo: $y = x^2 - 4x - 5$

Raíces: $\dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-5)}}{2\,.\,1} = \dfrac{4 \pm 6}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Vértice: $\begin{cases} x_v = \dfrac{5-1}{2} = 2 \\ y_v = 2^2 - 4\,.\,2 - 5 = -9 \end{cases} \Rightarrow V = (2\,;-9)$

Eje de simetría: $x = 2$

Ordenada al origen: $y = -5$



Análisis del gráfico de la parábola:

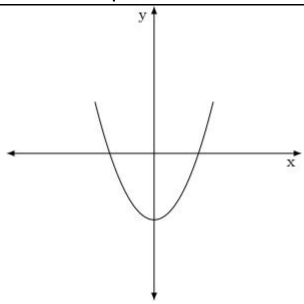
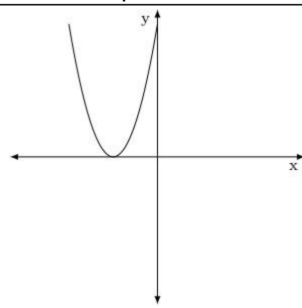
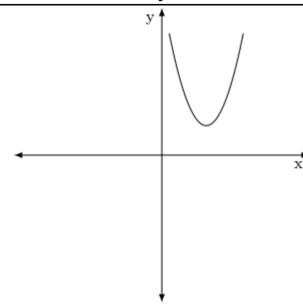
- Conjunto de ceros: $C^0 = \{-1\,;5\}$
- Conjuntos de positividad: $C^+ = (-\infty\,;-1) \cup (5\,;+\infty)$
- Conjunto de negatividad: $C^- = (-1\,;5)$
- Intervalo de crecimiento: $(2\,;+\infty)$
- Intervalo de decrecimiento: $(-\infty\,;2)$
- Mínimo: $(2\,;-9)$

Las raíces de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ se calculan mediante la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Al radicando $b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ se lo llama **discriminante**, ya que al valor del mismo se lo utiliza para discriminar la naturaleza de lasraíces (se lo simboliza con la letra griega Δ, delta).

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

	Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$	
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Dos raíces reales distintas. La función corta al eje x en dos puntos.	Una sola raíz real doble. La función corta al eje x en un solo punto.	Dos raíces complejas conjugadas. La función no corta al eje x.
		

Actividades

1) Completen la siguiente tabla. Luego, grafiquen las funciones en una hoja.

Función	a	b	c	Vértice	Eje de Simetría	RaícesReales	Ordenada al origen	Conjunto imagen
$y = 0{,}5x^2 - 8$								
$y = x^2 + 5x + 4$								
$y = -3x^2 + 6x$								
$y = -x^2 + 2x - 3$								

<u>**Actividad 2:**</u> Reconocer todos los elementos y luego representar gráficamente cada una de las siguientes funciones cuadráticas.

$a)\ f(x) = x^2 + 8x + 12$ $b)\ g(x) = -x^2 + x + 1$ $c)\ h(x) = x^2 - 2x + 1$

$d)\ y = x^2 + 2x + 3$ $e)\ y = x^2 - 4x - 2$ $f)\ y = -x^2 + 4x + 5$

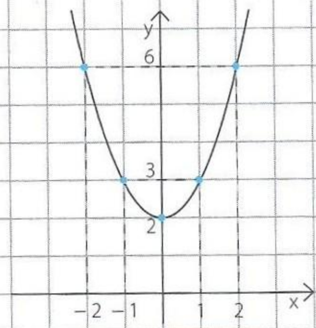
$g)\ y = x^2 + 5x + 4$ $h)\ y = -2x^2 - 4x + 3$ $i)\ y = 3x^2 - 6x - 6$

$j)\ y = 4x^2 - 3x - 1$ $k)\ y = -7x^2 + 28x + 21$ $l)\ y = x^2 + 3x + 1$

Ejercitación

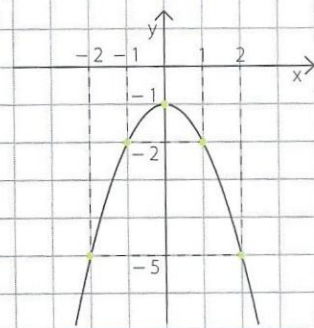
27 **Marcar con una X la función que corresponde a cada gráfica.**

a)



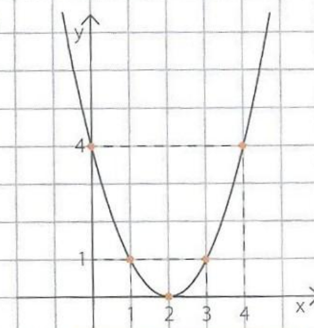
$y = x^2 - 2$	
$y = x^2 + 2$	
$y = (x + 2)^2$	

b)



$y = (x - 1)^2$	
$y = -x^2 + 1$	
$y = -x^2 - 1$	

c)



$y = (x - 2)^2$	
$y = x^2 + 2$	
$y = (x + 2)^2$	

28 **Realizar el gráfico y el análisis de las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 + 2x - 8$

b) $y = -x^2 + 8x - 7$

Ecuación canónica y factorizada

Teoría

Hay tres maneras diferentes de expresar la fórmula de una función cuadrática:

$$y = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{\text{Expresión polinómica}} = \underbrace{a(x - x_v)^2 + y_v}_{\text{Expresión canónica}} = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{\text{Expresión factorizada}}$$

La expresión **canónica** explicita el **vértice** de la parábola; y la expresión **factorizada**, sus **raíces**.

Para encontrar las diferentes expresiones, se debe partir de alguna de ellas:

- A partir de la expresión polinómica:

$$y = x^2 - 4x - 21$$

$$\nearrow \text{raíces}: \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\,.\,1\,.\,(-21)}}{2\,.\,1} = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \end{cases} \rightarrow y = \underbrace{(x-7)(x+3)}_{\text{Expresión factorizada}}$$

$$\searrow \text{vértice}: \begin{cases} x_v = \dfrac{7-3}{2} = 2 \\ y_v = 2^2 - 4\,.\,2 - 21 = -25 \end{cases} \rightarrow y = \underbrace{(x-2)^2 - 25}_{\text{Expresión canónica}}$$

- A partir de la expresión canónica:

$$y = (x+3)^2 - 4$$

$$\nearrow (x+3)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 4 \Rightarrow |x+3| = 2 \begin{cases} x + 3 = 2 \Rightarrow x_1 = -1 \\ x + 3 = -2 \Rightarrow x_2 = -5 \end{cases} \rightarrow y = \underbrace{(x+1)(x+5)}_{\text{Expresión factorizada}}$$

$$\searrow y = (x+3)^2 - 4 \Rightarrow y = x^2 + 6x + 9 - 4 \Rightarrow y = \underbrace{x^2 + 6x + 5}_{\text{Expresión polinómica}}$$

- A partir de la expresión factorizada:

$$y = (x+5)(x-7)$$

$$\nearrow \text{vértice}: \begin{cases} x_v = \dfrac{-5+7}{2} = 1 \\ y_v = (1+5)(1-7) = -36 \end{cases} \rightarrow y = \underbrace{(x-1)^2 - 36}_{\text{Expresión canónica}}$$

$$\searrow y = (x+5)(x-7) \Rightarrow y = x^2 + 5x - 7x - 35 \Rightarrow y = \underbrace{x^2 - 2x - 35}_{\text{Expresión polinómica}}$$

Ejercitación

29 **Hallar la expresión polinómica de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = 2(x-3)(x+2)$

b) $y = 3(x-5)^2 - 18$

30 **Hallar la expresión canónica de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = (x-4)(x-6)$

b) $y = x^2 - 8x - 9$

31 **Hallar la expresión factorizada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $y = 2(x-3)^2 - 8$

b) $y = -x^2 + 4x + 12$

32 **Hallar la ecuación polinómica de cada parábola con la información dada en cada caso.**

a) $C^0 = \{-5 ; 1\}$ y la ordenada al origen es 10.

c) $C^0 = \{3 ; 7\}$ y pasa por $(2 ; 10)$.

b) $V = (-1 ; -9)$ y la ordenada al origen es -8.

d) $V = (-1 ; -12)$ y una de sus raíces es -3.

Para pensar y resolver

33 **Hallar la ecuación y graficar la parábola que pasa por los puntos $(0 ; -7)$, $(-2 ; 9)$ y $(1 ; -12)$.**

Resumen: La función cuadrática puede ser expresada de distintas formas.

Polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Canónica: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

Factorizada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

- Para pasar de la forma polinómica a la forma canónica se busca el vértice.
- Para pasar de la forma canónica a la forma polinómica se desarrolla el cuadrado del binomio.
- Para pasar de la forma polinómica a la forma factorizada se buscan las raíces.
- Para pasar de la forma factorizada a la forma polinómica se aplica la propiedad distributiva.

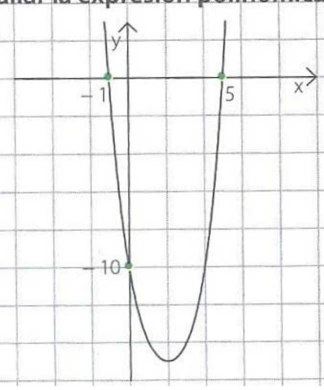
37 **Realizar el gráfico y el análisis de las siguientes parábolas.**

a) $y = x^2 - 6x + 5$

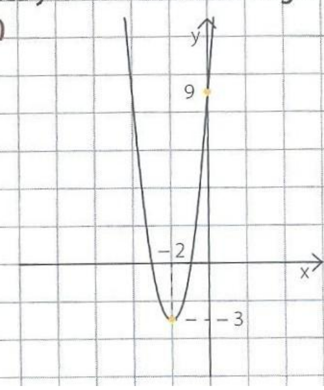
b) $y = -x^2 + 4x - 4$

38 **Hallar la expresión polinómica, canónica y factorizada de las siguientes funciones.**

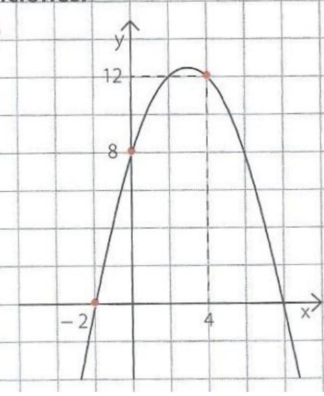
a)



b)



c)



<u>Actividades de revisión y aplicación</u>

1) Expresen en forma polinómica las siguientes funciones cuadráticas.

$a)\ y = 3 \cdot (x-1)^2 + 2$ $\qquad b)\ y = (x-3)\cdot(x+1)$

$c)\ y = 4 \cdot (x+\sqrt{5}) \cdot (x-\sqrt{5})$ $\qquad d)\ y = -3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

2) Dadas las siguientes funciones de segundo grado:

$I)\ y = 4x^2 - 9x + 2$ $\qquad II)\ y = x^2 - 9$ $\qquad III)\ y = x^2 - 12x + 11$

a) Escriban en forma factorizada. b) Grafiquen.

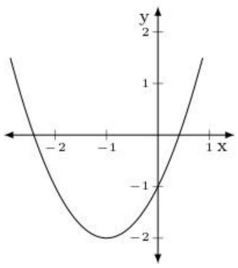
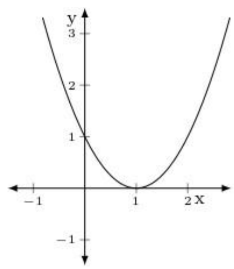
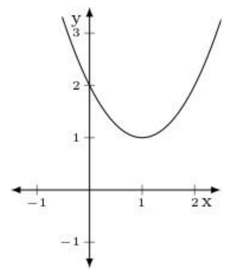
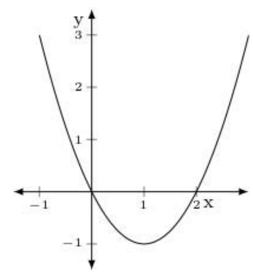
3) Escriban en forma canónica:

$I)\ y = x^2 + 4x - 3 \qquad II)\ y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \qquad III) - x^2 - 8x + 2$

Respondan para cada una:
a) ¿Cuál es el eje de simetría? b) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice? c) ¿Tienen máximos o mínimos?

4) Marquen las opciones correctas.

a) ¿Cuál es la parábola que corresponde a la función $y = x^2 - 2x + 2$? Justificar por qué no corresponde el gráfico.

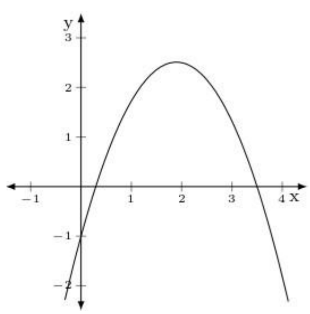
b) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen raíces reales?

$a)\ y = -3x^2 - 2 \qquad b)\ y = -4x^2 + 2x \qquad c)\ y = x^2 - 2x + 6 \qquad d)\ y = x^2 + 5$

5) Grafiquen las funciones definidas a continuación, reconozcan los elementos e indiquen:
Valores máximos o mínimos – Crecimiento y decrecimiento - Eje de simetría – Dominio e Imagen – Intervalos de positividad y negatividad

a) $y = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ b) $y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 5)$ c) $y = x^2 + 3x + 2$

6) Tengan en cuenta el gráfico de la función y escriban V (Verdadero) o F (Falso) según corresponda.



a) $\Delta < 0$ ☐
b) Tiene raíces reales ☐
c) Alcanza su valor mínimo en el vértice ☐
d) Crece en el intervalo $(-\infty ; -2)$ ☐
e) Tiene ordenada al origen negativa ☐

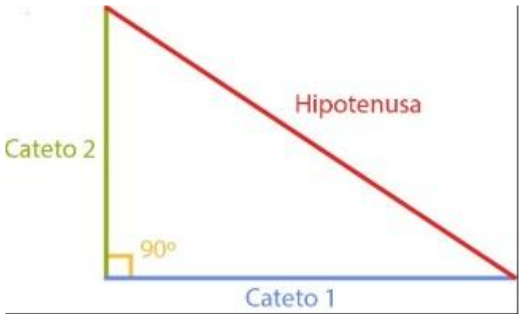
7) Resuelvan los siguientes problemas:

1) Supongamos que el rendimiento intelectual de una persona que estudia desde la 9 hs hasta las 13 hs responde a la función $R = 4t - t^2$, donde R es el rendimiento y t el tiempo transcurrido desde las 9 hs, medido en horas.
¿A qué hora se obtiene el mayor rendimiento? ¿Cuál es el intervalo de mejor aprovechamiento? Graficar.
2) Una pelota de fútbol que está sobre el piso recibe una patada hacia arriba; si la altura que alcanza en metros viene dada por la fórmula $y = 3t - \frac{3}{4}t^2$ donde t se mide en segundos.
¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es la altura? ¿A los cuántos segundos vuelve a tocar el piso?
3) Pedro vende zapatillas importadas; por esa venta tiene un ingreso que calcula con la fórmula $y = x \cdot (x + 5)$, siendo x el número de zapatillas vendidas.
a) Grafiquen y analicen qué parte de la gráfica modeliza esta situación.
b) ¿Cuál es el dominio? c) ¿Cuáles son los ingresos si vende 500 zapatillas?
4) Mauro patea una pelota cuya posición en función del tiempo está dada por la fórmula $p(t) = -3t^2 + 12t$ (p es la posición en metros y t el tiempo en segundos).
a) ¿Qué altura alcanza a los 4 segundos?
b) ¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuánto tarda en caer?
d) ¿Cuáles son los valores de "y" válidos en el contexto del problema?
e) Grafica la situación

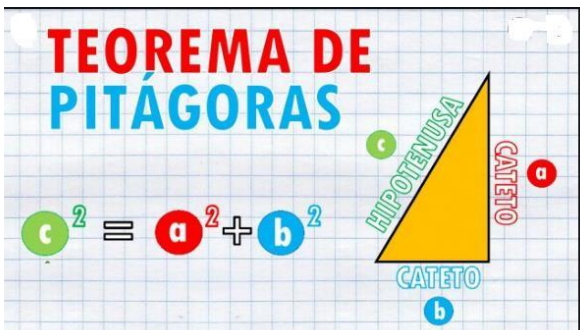
Unidad IV: Trigonometría

La trigonometría es una rama de la matemática que estudia las relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo. En este caso sólo estudiaremos las medidas de los **triángulos rectángulos**, es decir, los triángulos en donde la amplitud de uno de sus ángulos es 90° (un recto).

ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO



- Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.
- El lado opuesto al ángulo de 90° se llama **hipotenusa** y siempre será el lado de mayor longitud.
- Un triángulo rectángulo, tiene **un ángulo recto** (90°) y los otros **dos agudos** (menos de 90° grados)



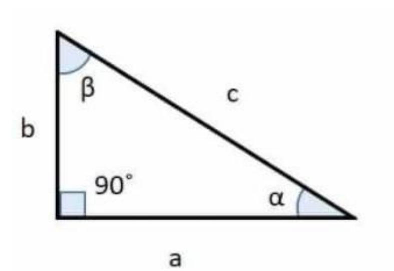
- Es una fórmula en la cual debemos reemplazar dos valores que serán los datos y calcular un tercero.
- Podemos tener como datos dos catetos y hallar la hipotenusa.
- podemos tener de datos la hipotenusa y un cateto y hallar el otro cateto.

Propiedades del triángulo rectángulo

En cualquier triángulo rectángulo, se verifica que:

- $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90° \rightarrow Relación\ entre\ ángulos\ agudos$
- $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow Relación\ entre\ sus\ lados$. Esta segunda propiedad es más conocida como el *Teorema de Pitágoras*.

Video sugerido: https://youtu.be/rPlfmJDHfog

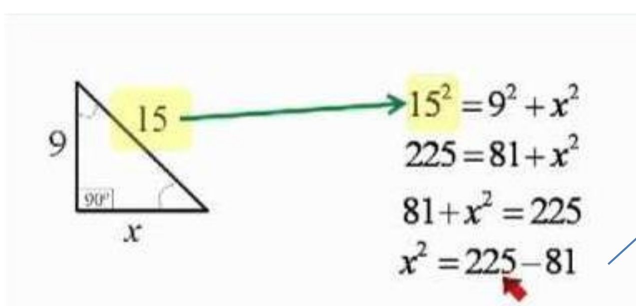


Observando el triángulo rectángulo, tenemos que:

- ✓ Respecto de $\hat{\alpha}$ el lado **b** es el *cateto opuesto* y el lado **a** es el *cateto adyacente*.
- ✓ Respecto de β: el lado **a** es el *cateto opuesto* y el lado **b** es el *cateto adyacente.*
- ✓ Respecto a ambos ángulos, el lado **c** siempre es la *hipotenusa.*

Ejemplos de Teorema de Pitágoras

1) Hallar el valor del cateto.

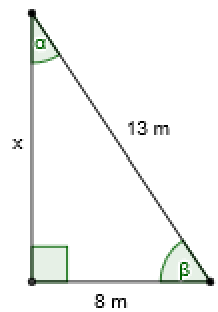


$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12$$

2) El Teorema de Pitágoras en la vida cotidiana:

Una torre de alta tensión tiene un cable que tiene un extremo fijo en el suelo. La longitud del cable es de 13 m. La distancia entre el pie de la torre y el punto donde se sujeta el cable al piso es de 8 m.

¿Cuál es la altura de la torre? ¿Qué propiedades podemos emplear para hallarla?



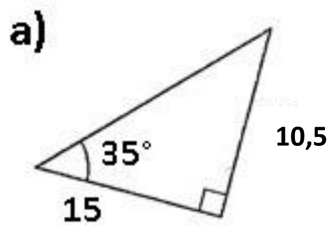
Realizamos un bosquejo de la misma y resolvemos:

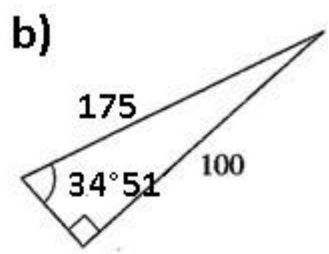
Para determinar la altura de la torre, x, debemos aplicar la segunda propiedad enunciada (Teorema de Pitágoras):

$$13^2 = 8^2 + x^2$$
$$13^2 - 8^2 = x^2$$
$$\sqrt{13^2 - 8^2} = x$$
$$\sqrt{105} \cong 10{,}25 = x$$

Por lo tanto la torre de alta tensión mide 10,25 metros.

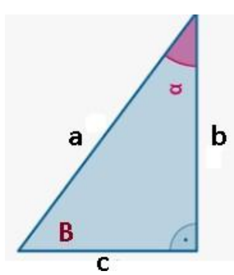
Actividad 1) Hallar el valor de los lados y ángulos de los siguientes triángulos. (teorema de Pitágoras y propiedades de los ángulos)

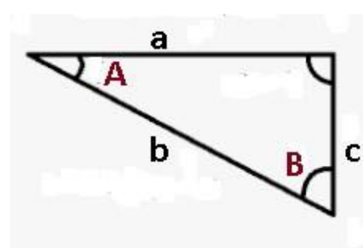




Actividades

1) Observar los siguientes triángulos y completar:





El cateto opuesto de α es………………..

El cateto adyacente de B es……………..

Si B=73°, entonces α=……………………

La hipotenusa, es el lado………………………

el cateto adyacente de A es……………………

Si A= 22°, entonces B=………………………

2) Realizar una figura de análisis (un triangulo rectángulo) y resolver:

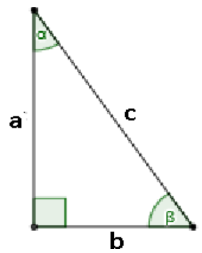
a) Un empleado de la EPE se encuentra trabajando en un edificio. Está en la punta de una escalera de 5 metros de largo que está apoyada en la pared. Si la distancia de la pared al pie de la escalera es de 2 metros. ¿A qué altura se encuentra la persona trabajando?

b) Un poste de madera tiene 8 metros de altura. Se quieren sujetar tres cables desde el extremo superior del poste al suelo. Si la distancia de la base del poste al cable es de 3 metros. ¿Cuántos metros de cable se necesitan?

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Hasta ahora trabajamos calculando ángulos del triángulo rectángulo, teniendo como datos sólo ángulos y hallamos lados del triángulo teniendo como datos solo lados. Esto se debe a las magnitudes, es decir, la unidad de medida de los ángulos son los grados (sistema sexagesimal) mientras que la unidad de medida de los lados es la LONGITUD (metros, centímetros, kilómetros).
Ahora cuando tengamos que realizar cálculos y tengamos como datos un ángulo y un lado, aplicaremos las razones trigonométricas.

Razones trigonométricas: Las razones trigonométricas relacionan la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con longitud de los lados y se definen de la siguiente manera:

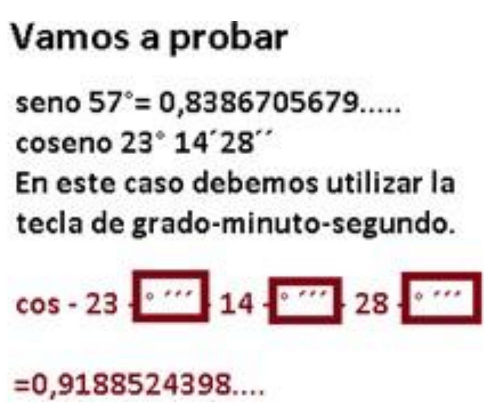


Seno de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} \rightarrow sen\hat{\alpha} = \frac{b}{c}$ $y\ sen\hat{\beta} = \frac{a}{c}$

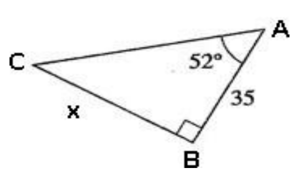
Coseno de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} \rightarrow cos\hat{\alpha} = \frac{a}{c}$ $y\ cos\hat{\beta} = \frac{b}{c}$

Tangente de un ángulo agudo: $\frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} \rightarrow tg\ \hat{\alpha} = \frac{b}{a}$ $y\ tg\ \hat{\beta} = \frac{a}{b}$

Para poder realizar los cálculos, necesitarás calculadora científica.



Ejemplo 1) Hallar el valor de "x"



Datos: el ángulo A= 52° y Lado AB = 35cm Incógnita: Lado BC

- El objetivo es hallar un lado.
- Si queremos aplicar Pitágoras, no podemos porque nos faltaría un lado como dato.

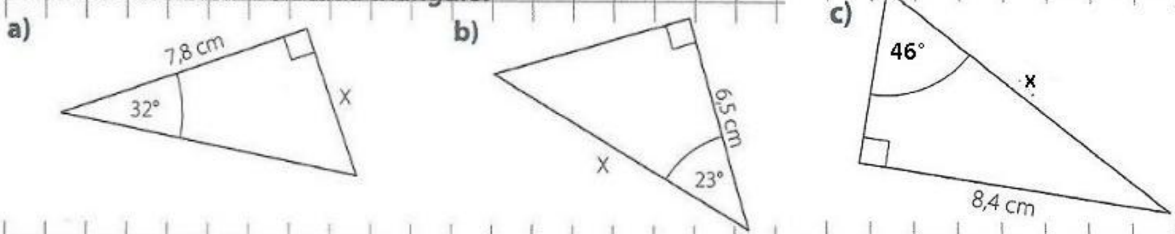
Tenemos que aplicar las razones trigonométricas.

- ¿Cuál? Miramos el ángulo A y observemos que AB=35 es el cateto adyacente y CB = x, es el cateto opuesto
- Busquemos cuales de las razones trigonométricas relacionan un ángulo con **el cateto opuesto y el cateto adyacente:**
- La opción es la tangente, entonces reemplazamos en la razón con los datos y la incógnita:

$$despejamos\ x \begin{cases} tg52° = \dfrac{x}{35} \\ 1{,}279999 = \dfrac{x}{35} \\ 1{,}279999\ \cdot 35 = x \\ 44{,}79\ \cong x \end{cases}$$

Actividad 1)

Calcular el valor de x en cada triángulo.

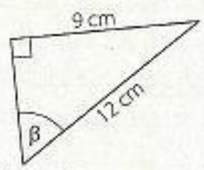


Cálculo de un ángulo agudo conocidos dos lados

Teoría

Para calcular la amplitud de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuando se conoce la longitud de dos de sus lados, se deben utilizar las razones trigonométricas y la calculadora científica.

a)

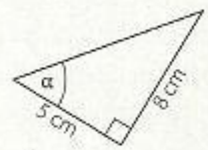


$\operatorname{sen}\hat{\beta} = \frac{9cm}{12cm} \Rightarrow \hat{\beta} = \operatorname{arcsen}\ 0{,}75 \Rightarrow \hat{\beta} = 48°35'25''$

Secuencia de teclas en la calculadora:

SHIFT → sin → 0,75 → = → ° ′ ″

b)



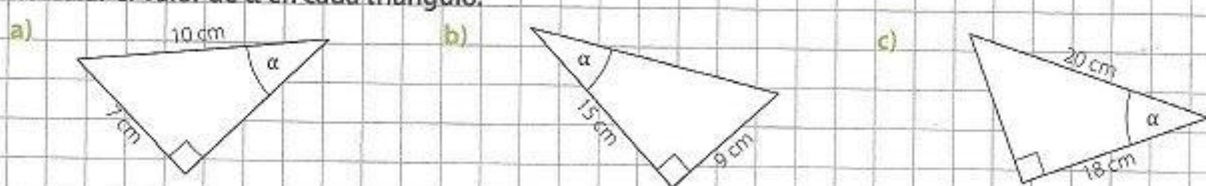
$\operatorname{tg}\hat{\alpha} = \frac{8cm}{5cm} \Rightarrow \hat{\alpha} = \operatorname{arctg}\ 1{,}6 \Rightarrow \hat{\alpha} = 57°59'41''$

Secuencia de teclas en la calculadora:

SHIFT → tan → 1,6 → = → ° ′ ″

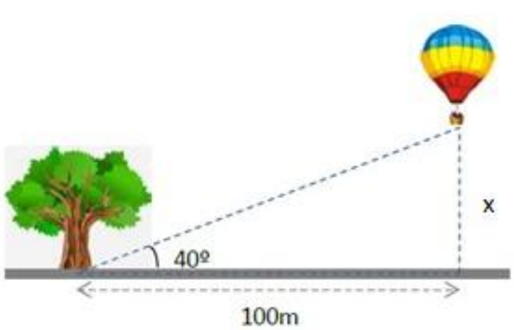
Actividad 2)

Calcular el valor de $\hat{\alpha}$ en cada triángulo.



Lean a continuación un ejemplo en el cual se pueden aplicar las razones trigonométricas

¿A qué altura se encuentra el globo aerostático?



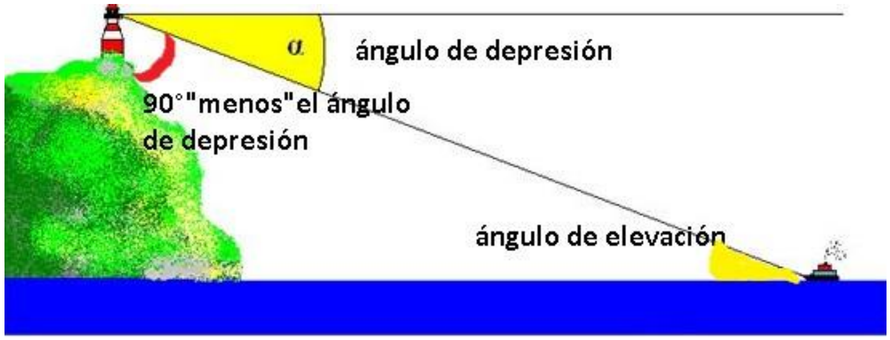
Cuando tenemos estos problemas debemos ver cuáles son los datos que tenemos para saber que propiedad aplicar.

Datos: x es el lado opuesto y el lado de 100m es lado adyacente al ángulo de 40°, por lo tanto debemos utilizar la tangente del ángulo dado para hallar x.

$$tg\ 40° = \frac{x}{100}$$
$$tg\ 40° \cdot 100 = x$$
$$83{,}91 = x$$

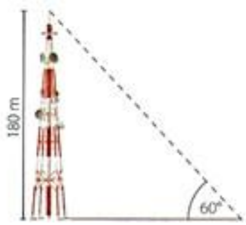
Por lo tanto el globo aerostático se encuentra a **casi 84 metros de altura.**

Para tener en cuenta: el ángulo de DEPRESIÓN, es igual al ángulo de ELEVACIÓN!

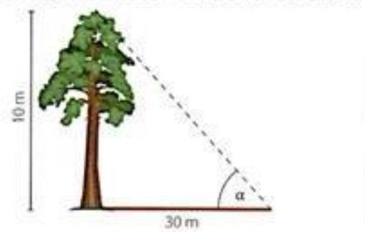


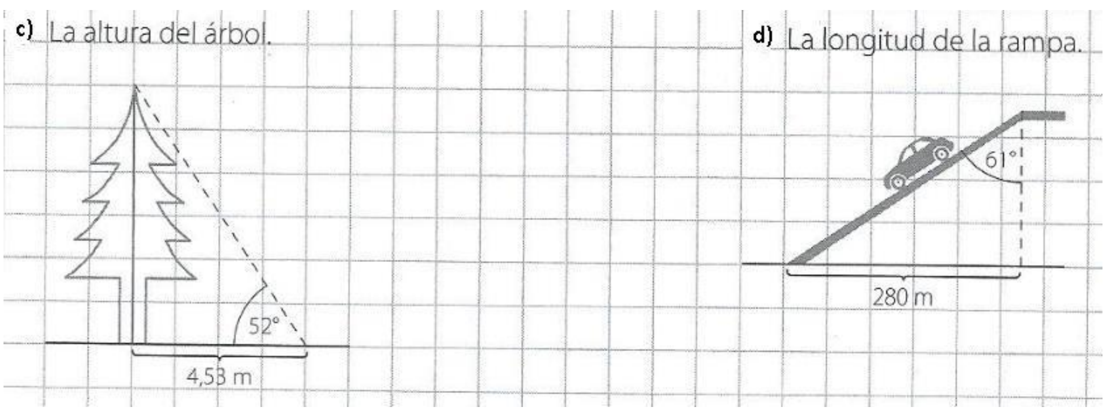
Actividad 3) Observar el gráfico y calcular:

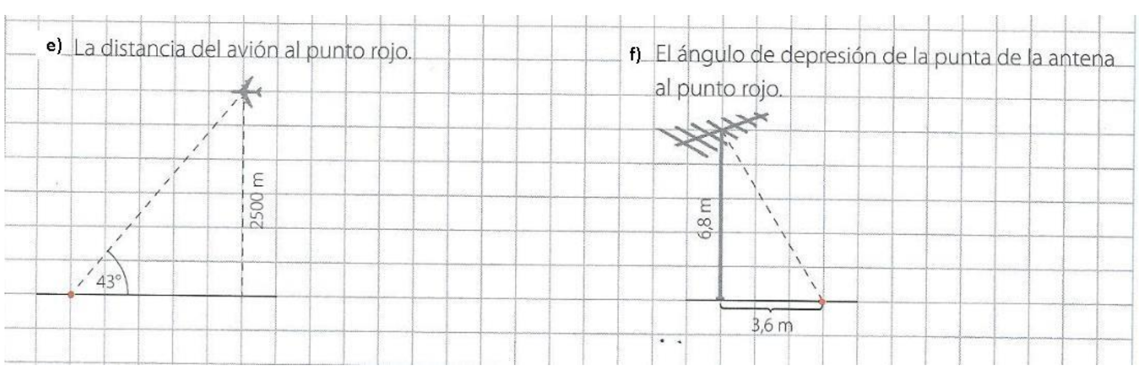
a) ¿A qué distancia de su pie se observa la torre?



b) ¿Con qué ángulo se observa la punta del árbol?







Actividad 4)

Realizar la figura de análisis, plantear y resolver.

a) Si un barrilete está sostenido por un hilo de 32,54 m de largo y tiene un ángulo de elevación de 79°, ¿a qué altura está el barrilete?

b) Un piso de un cine tiene una longitud de 56,23 m. Si se coloca un entarimado con una inclinación de 12° para las butacas, ¿cuál es la longitud del entarimado?

c) Un avión se encuentra a una altura de 1.850 m y está descendiendo hacia un aeropuerto que se encuentra a 4.780 m. ¿Cuál es el ángulo de descenso del avión?

d) Para descargar un camión, se coloca una rampa de 4,73 m que se apoya a 3,94 m del camión. ¿Cuál es el ángulo de elevación de la rampa?

e) Se sube un paquete por una rampa que tiene una inclinación de 23° y una longitud de 5,80 m. ¿A qué altura se sube el paquete?

f) El tensor de una antena está amarrado a 50 m de su pie y tiene un ángulo de elevación de 73°. ¿A que altura de la antena está agarrado el tensor?

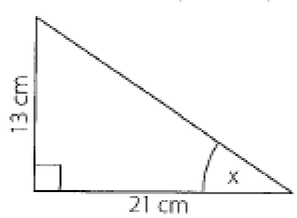
g) La cima de una montaña se observa a 800 m de su pie con un ángulo de elevación de 64°. ¿A qué distancia de la cima se encuentra el observador?

h) ¿Cuál es el ángulo de elevación de un avión que recorre 5.200 m en el aire y alcanza una altura de 3.000 m?

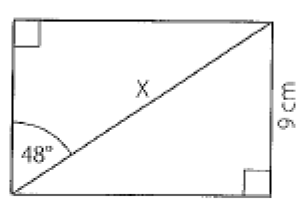
Actividad 5)

Hallar el valor de x en cada figura.

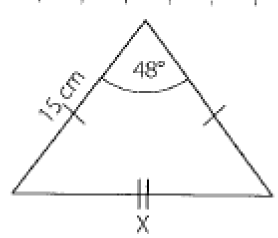
a)



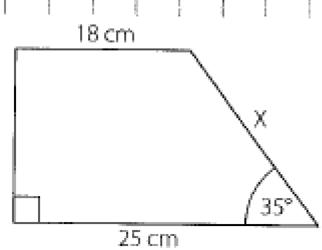
b)



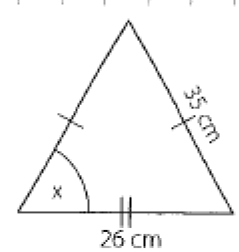
c)



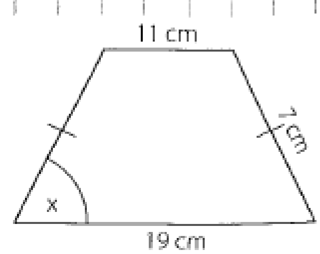
d)



e)



f)



Unidad V: Módulo. Ecuaciones e Inecuaciones con módulo

4 Módulo de un real. Propiedades

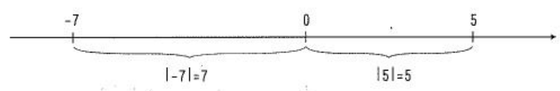
*El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero sobre la recta real.*

Para todo número real x, su módulo se expresa: $|x|$.

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) $|5| = 5$

b) $|-7| = -(-7) = 7$



Propiedades

1) $|x| \geq 0$

a) $|-6{,}5| = -(-6{,}5) = 6{,}5$ **b)** $\left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$ **c)** $|0| = 0$

2) $|x| = |-x|$

a) $|0{,}02| = |-0{,}02| = -(-0{,}02) = 0{,}02$ **b)** $|132| = |-132| = -(-132) = 132$

3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

a) $|8 + 4{,}1| \leq |8| + |4{,}1|$
$|12{,}1| \leq 8 + 4{,}1$
$12{,}1 \leq 12{,}1$

b) $|1{,}4 + (-2)| \leq |1{,}4| + |-2|$
$|-0{,}6| \leq 1{,}4 + 2$
$0{,}6 \leq 3{,}4$

c) $|-5 + (-1{,}4)| \leq |-5| + |-1{,}4|$
$|-6{,}4| \leq 5 + 1{,}4$
$6{,}4 \leq 6{,}4$

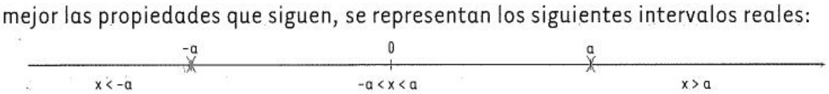
4) $|x.y| = |x|.|y|$

a) $|6.(-5)| = |6|.|-5|$
$|-30| = 6.5$
$30 = 30$

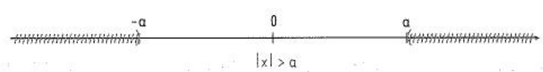
b) $|8.3| = |8|.|3|$
$|24| = 8.3$
$24 = 24$

c) $|-0{,}1.(-9{,}5)| = |-0{,}1|.|-9{,}5|$
$|0{,}95| = 0{,}1.9{,}5$
$0{,}95 = 0{,}95$

Para entender mejor las propiedades que siguen, se representan los siguientes intervalos reales:



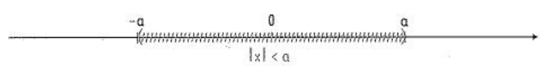
5) $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty;-a) \cup (a,+\infty)$



a) $|x| > 6 \Rightarrow x > 6 \vee x < -6 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (6;+\infty)$

b) $|x| \geq 2{,}5 \Rightarrow x \geq 2{,}5 \vee x \leq -2{,}5 \Rightarrow x \in (-\infty;-2{,}5] \cup [2{,}5;+\infty)$

6) $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a;a)$



a) $|x| < 8 \Rightarrow -8 < x < 8 \Rightarrow x \in (-8;8)$

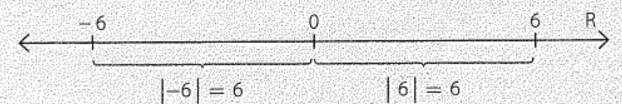
b) $|x| \leq \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2}\right)$

Ecuaciones con módulo

Teoría

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real es su distancia al cero en la recta real.

$$|a| \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



$|x| = 6 \Rightarrow x = 6 \lor x = -6$

Para resolver una ecuación con módulo debe aplicarse que: $\boxed{|x| = a \Rightarrow x = a \lor x = -a \Rightarrow x = \pm a}$

a) $|x + 2| = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \lor x + 2 = -5 \Rightarrow x = 5 - 2 \lor x = -5 - 2 \Rightarrow x_1 = 3 \lor x_2 = -7$

b) $3|x - 1| + 5 = 23 \Rightarrow 3|x - 1| = 18 \Rightarrow |x - 1| = 6 \Rightarrow x - 1 = 6 \lor x - 1 = -6 \Rightarrow x_1 = 7 \lor x_2 = -5$

c) $2|x + 3| + 8 = 0 \Rightarrow 2|x + 3| = -8 \Rightarrow |x + 3| = -4 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow$ La ecuación no tiene solución real.

Ejercitación

25 **Colocar >, < o = según corresponda.**

a) $|3|$ ☐ $|-5|$

b) $|-10|$ ☐ $|-10 + 1|$

c) $|4 - 1|$ ☐ $|1 - 4|$

d) $-1 - 7$ ☐ $|-1 - 7|$

e) $|-6| + |-3|$ ☐ $|-9|$

f) $|-5| - |3|$ ☐ $|-5 - 3|$

g) $|8 - 3|$ ☐ $|8| - |3|$

h) $|5| - |9|$ ☐ $|5 - 9|$

i) $|-3| \,.\, |2|$ ☐ $|-3 \,.\, 2|$

j) $-4 \,.\, |-5|$ ☐ $|-4| \,.\, (-5)$

26 **Hallar, si existen, los valores de a que verifiquen la igualdad.**

a) $|a| + 5 = 7$

b) $3 \,.\, |a| = 18$

c) $-4 + |a| = 2$

d) $3 + |a| = 1$

e) $|a + 1| = 0$

f) $8 - |a| = 3$

g) $|a + 1| = -2$

h) $|a| : 2 = 6$

i) $2|a| = -4$

27 **Unir cada ecuación con su solución.**

a) $|x+7| = 3$

b) $|x-4| = 6$

c) $|x+3| = 9$

d) $|x-1| = 5$

e) $|x+2| = 8$

f) $|x-6| = 2$

$x_1 = -10 \vee x_2 = -4$

$x_1 = 6 \vee x_2 = -10$

$x_1 = 2 \vee x_2 = -8$

$x_1 = 8 \vee x_2 = 4$

$x_1 = -4 \vee x_2 = 6$

$x_1 = 6 \vee x_2 = -12$

$x_1 = 10 \vee x_2 = -2$

28 **Resolver y verificar las siguientes ecuaciones.**

a) $2|x+1| - 3 = 7$

e) $-5 \cdot |x+4| + 11 = 1$

b) $|3-x| : 2 + 1 = 9$

f) $3 + |x| = 3x - 5$

c) $|3x+2| = 11$

g) $|x+6| - 2 = 2x + 1$

d) $|2x-1| - 5 = 8$

h) $|4x-1| = 3x - 13$

Para pensar y resolver

29 **Resolver la siguiente ecuación:** $|x+1| + |x| = 3$.

Inecuaciones lineales

Teoría

Resolver una inecuación es encontrar el intervalo real de valores que la verifican y se utilizan los mismos procedimientos que para resolver una ecuación, salvo en el caso en que se multiplique o divida a ambos miembros por un número negativo, en cuyo caso se invierte el sentido de la desigualdad.

a) $3x + 1 < 5x + 7$
$3x - 5x < 7 - 1$
$-2x < 6$
$x > 6 : (-2)$
$x > -3$
$S = (-3\,;+\infty)$

b) $2x + 1 \geq 5x - 11$
$2x - 5x \geq -11 - 1$
$-3x \geq -12$
$x \leq -12 : (-3)$
$x \leq 4$
$S = (-\infty\,;4]$

c) $\dfrac{4x+1}{-3} > 1 - 2x$
$4x + 1 < (1 - 2x) . (-3)$
$4x + 1 < -3 + 6x$
$4x - 6x > -3 - 1$
$-2x > -4$
$x < -4 : (-2)$
$x < 2$
$S = (-\infty\,;2)$

Ejercitación

30 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $2x - 7 \geq 5x + 8$

d) $0{,}8(2x - 5) - 0{,}6x > 3x - 10$

g) $1 - \dfrac{x+2}{5} \geq 0{,}4x - 3$

b) $-7x + 15 < 2(x - 6)$

e) $1 - 4(x + 3) < x + 9$

h) $(2 - 3x) : (-2) \leq \dfrac{3x+1}{5}$

c) $3(x + 2) - 1 \leq 7x - 3$

f) $\dfrac{3x-5}{2} > 3x + 8$

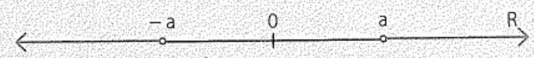
i) $\dfrac{3x-4}{2} + \dfrac{2x-3}{4} > x - 1$

Inecuaciones lineales con módulo

Teoría

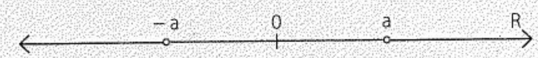
Para resolver inecuaciones lineales con módulo deben aplicarse dos propiedades del módulo:

- $|x| > a \wedge a > 0 \Rightarrow x > a \vee x < -a \Rightarrow x \in (-\infty\,;-a) \cup (a\,;+\infty)$



$|x| > a$

- $|x| < a \wedge a > 0 \Rightarrow -a < x < a \Rightarrow x \in (-a\,;a)$



$|x| < a$

a) $|x| \geq 5 \Rightarrow x \geq 5 \vee x \leq -5 \Rightarrow S = (-\infty\,;-5] \cup [5\,;+\infty)$

b) $|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow S = [-4\,;4]$

c) $|2x-1| > 7 \Rightarrow 2x-1 > 7 \vee 2x-1 < -7 \Rightarrow 2x > 8 \vee 2x < -6 \Rightarrow x > 4 \vee x < -3 \Rightarrow S = (-\infty\,;-3) \cup (4\,;+\infty)$

d) $|x+5| < 3 \Rightarrow -3 < x+5 < 3 \Rightarrow -3-5 < x < 3-5 \Rightarrow -8 < x < -2 \Rightarrow S = (-8\,;-2)$

Ejercitación

31 **Escribir el intervalo solución.**

a) $|x| \leq 7$ b) $|x| > 10$ c) $|x| < 6$ d) $|x| \geq 8$

32 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $|x+3| < 7$

d) $|x+5| > 9$

g) $2|x+5| - 1 \geq 3$

b) $|x-1| \geq 8$

e) $|2x+1| \leq 7$

h) $|x| \leq 2x - 6$

c) $|x-4| \leq 10$

f) $|3x-2| < 5$

i) $3 + |x+2| > 7 + 2x$

Tarea para el hogar

37 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $|-10| > -10$ ☐

b) $|-4-3| < |-8|$ ☐

c) $|-7| - |-8| > 0$ ☐

d) $|-2 \cdot 6| = |-2| \cdot |6|$ ☐

e) $|-5+8| = |-5| + |8|$ ☐

f) $-3|-7| = |-3 \cdot (-7)|$ ☐

g) $|-2-(-9)| = |-2| - |-9|$ ☐

h) $|-6| + |-3| = |-6-3|$ ☐

38 **Hallar el conjunto solución de cada ecuación.**

a) $|x+3| + 5 = 1$

b) $|2x+1| = 7$

c) $|5x-3| = 0$

d) $|3x-4| = 8$

e) $2|x-3| - 1 = 5$

f) $4|3x-2| + 7 = 23$

39 **Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones.**

a) $-5x + 8 - x > 2(x-5)$

b) $2(3x-1) + 7 \leq 11x - 10$

c) $\dfrac{x-2}{3} \geq 0,\widehat{2}x + \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{3}{4}\left(0,\widehat{8}x - 1\right) + 0,5 > \dfrac{1}{6}x$

e) $\dfrac{3x-4}{5} - 0,7x < \dfrac{6x+1}{10}$

f) $1,\widehat{3}\left(\dfrac{6x-3}{4}\right) - \dfrac{x-1}{6} \geq 1$

40 **Colocar V (verdadero) o F (falso) según corresponda.**

a) $|x| < 5 \Rightarrow x \in [-5 ; 5]$ ☐

b) $|x| \geq 2 \Rightarrow x \notin (-2 ; 2)$ ☐

c) $|x| < 1 \Rightarrow x \in (0 ; 1)$ ☐

d) $|x| \geq 0 \Rightarrow x \in R$ ☐

e) $|x| > 0 \Rightarrow x \in (0 ; +\infty)$ ☐

f) $|x| \geq -3 \Rightarrow x \notin R$ ☐

41 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $|x - 2| \leq 5$

b) $|2x - 3| > 9$

c) $3|x + 4| - 1 < 11$

d) $5 + 2|x - 5| \geq 13$

e) $|x + 3| < 3x + 7$

f) $4x^2 - 73 \leq 27$

g) $x(x + 3) > 5x$

h) $(x - 1)^2 < 49$

i) $x(x - 4) + 6x \geq 3$

j) $2x(5x - 1) \leq 7x(x + 1)$

k) $(x - 3)^2 < 3x - 11$

l) $(2x - 1)^2 > 325 - 4x$

Ejercicios de repaso

48 **Resolver las siguientes ecuaciones.**

a) $3|x-2|-5=19$

b) $|2x+7|+1=12$

c) $3-2|x-3|=-11$

d) $|2x+5|=x+3$

49 **Hallar el conjunto solución.**

a) $x-5-7x\leq 2(4-x)+3$

b) $\frac{2x-1}{5}>0{,}8x-\frac{1-3x}{2}$

c) $0{,}\widehat{5}(1{,}2x-0{,}24)+0{,}2\widehat{6}<x$

d) $\frac{1-2x}{6}-\frac{5x-2}{3}\geq 0{,}\widehat{4}x-0{,}\widehat{6}$

50 **Resolver las siguientes inecuaciones.**

a) $|3x-2|+1\geq 8$

b) $5-|x+1|>1$

c) $|x+3|-1<2x+5$

d) $(x-1)^2\leq 121$

e) $(x-3)(x+4)\geq x$

f) $(x+5)(x-5)>24$

g) $(2x-3)^2+5x\geq 3(x^2-1)$

h) $(3x-2)(1-x)>2(x-1)$

i) $(5-x)^2\leq 2x(x-5)$